Obliczenia inspirowane Naturą

Wykład 02 – Własności automatów komórkowych

Jarosław Miszczak

IITiS PAN Gliwice

10/03/2016

Czego dowiedzieliśmy się na poprzednim wykładzie?

1. ...
2. ...
3. ...

1. Automaty komórkowe
   - Definicje
   - Sąsiedztwo
   - Warunki brzegowe
   - Złożoność automatów
   - Klasyfikacja Wolframa
   - Parametry
2. Automaty jednowymiarowe
3. Automaty dwuwymiarowe

Automaty komórkowe

Definicja

Automatem komórkowym nazywamy trójkę złożoną z:

- *sieci komórek w przestrzeni o wymiarze D,*
- *zbioru stanów $\{s_i : i = 1, 2, \ldots, k\}$ pojedynczej komórki,*
- *funkcji F określającej stan komórki w chwili $t + 1$ na podstawie stanów komórek z jej otoczenia,*

$$s_i(t + 1) = F(\{s_j(t) : j \in O(s_i)\}),$$

gdzie $O(s_i)$ to otoczenie komórki s_i.

Automaty komórkowe

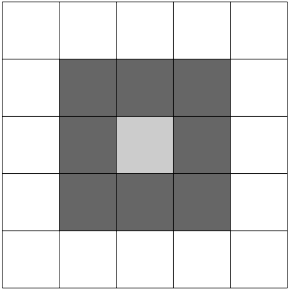
- Taka definicja pozwala na bardzo ogólne określenie zarówno układu połączeń pomiędzy komórkami sieci, jak i ewolucji całego układu.
- W praktyce najczęściej spotyka się automaty komórkowe realizowane na linii lub kracie.
- Funkcja F zależy najczęściej jedynie od ilość komórek otoczenia w danym stanie a nie od ich wzajemnego rozmieszczenia.

Automaty głosujące

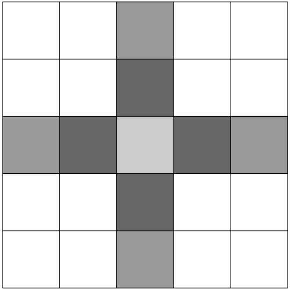
Automaty dwustanowe których reguły przejścia zależą od ilości jedynek w otoczeniu nazywa się automatami głosującymi.

Automaty komórkowe
Sąsiedztwo

Typowo przy rozważaniach dotyczących automatów komórkowych rozważa się dwa rodzaje otoczenia lub sąsiedztwa.



(a) Sąsiedztwo Moorea'a



(b) Sąsiedztwo von Neumanna

Badanie automatów komórkowych w dużym stopniu sprowadza się do ich symulacji. W związku z tym konieczne jest określenie jak będzie zachowywał się układ na brzegach siatki którą wykorzystany do symulacji. Możemy narzucić warunki brzegowe

- **periodyczne** – takie warunki prowadzą do automatów na sferze czy torusie;
- **pochłaniające** – w takim wypadku wyjście poza brzegi siatki powoduje zniknięcie cząstki;
- **odbijające** – w takim wypadku dojście na brzegi siatki powoduje odbicie cząstki.

Automaty komórkowe
Zmienność stanu

Do określenia zmian stanu automatu stosuje się **odległość Hamminga**,

$$d_H(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_i |s_i(\sigma_1) - s_i(\sigma_2)|,$$

gdzie $s_i(\sigma_k)$ oznacza stan komórki numer i w konfiguracji k. Obserwacja d_H w dla *długich* czasów i *dużych* rozmiarów to podstawowe narzędzie klasyfikacji automatów.

Automaty komórkowe

Klasyfikacja na podstawie reguł

Dla automatów 1D możemy określić *aktywność* jako względną ilość jedynek w tabeli.

Taka wielkość daje informacje o *średnim* zachowaniu automatu. Zaniedbuje jednak korelacje pomiędzy komórkami.

Automaty komórkowe
Złożoność automatów

Parametr λ zdefiniowany jako

$$\lambda = \frac{K^N - n}{K^N}$$

gdzie K to ilość stanów automatu, $N = (2r + 1)$ to rozmiar otoczenia, a n to ilość przejść do wybranego stanu stacjonarnego, pozwala na oszacowanie złożoności automatu.

- $\lambda = 0 \mapsto$ brak zmian;
- $\lambda = 1 \mapsto$ brak przejścia do stanu stacjonarnego;
- $\lambda = \frac{K-1}{K} \mapsto$ wszystkie stany jednakowo dostępne;

Automaty komórkowe
Klasyfikacja Wolframa

- Stephen Wolfram, twórca systemu algebry komputerowej *Mathematica*, poświęcił wiele prac badawczy modelowi automatów komputerowych. (http://atlas.wolfram.com/01/01/)
- W systemie *Mathematica* dostępna jest rozbudowana funkcja $\mathrm{CellularAutomaton}$, która umożliwia zabawę z automatami komórkowymi.

Automaty komórkowe
Klasyfikacja Wolframa

Jedną z najbardziej znanych klasyfikacji automatów komórkowych wprowadził Stephen Wolfram. Klasyfikacja ta opiera się na

- obserwacji stanów sieci rządzonej poszczególnymi regułami;
- przypadkowym doborze stanów początkowych.

Automaty komórkowe

Klasyfikacja Wolframa

W klasyfikacji Wolframa wyróżnione są cztery rodzaje automatów komórkowych:

I. Automaty jednorodne.

II. Automaty periodyczne (regularne).

III. Automaty chaotyczne.

IV. Automaty złożone.

Automaty komórkowe

Klasyfikacja Wolframa – Automaty jednorodne

Automaty jednorodne przechodzą w skończonym czasie do stanu, w którym wszystkie komórki przyjmują jednakowe wartości.

Automaty komórkowe

Klasyfikacja Wolframa – Automaty periodyczne (regularne)

- Automaty periodyczne (regularne) przechodzą w skończonym czasie do stanu, będącego kombinacją konfiguracji stabilnych i struktur powtarzalnych.
- Struktury stabilne nazywamy *atraktorami*, natomiast struktury powtarzalne (periodyczne) to *oscylatory*.

Automaty komórkowe

Klasyfikacja Wolframa – Automaty chaotyczne

- Automaty chaotyczne pozwalają na generowanie struktur losowych – *np.* fraktali – o ustalonych własnościach statystycznych.
- Własności chaotyczne są obserwowane dla skończonych czasów.

Automaty komórkowe
Klasyfikacja Wolframa – Automaty złożone

Automaty złożone ewoluują do złożonych konfiguracji lokalnych.

Automaty komórkowe
Klasyfikacja Wolframa

- Automaty zaliczane do klas I i II prowadzą do stałych konfiguracji.
- Automaty klasy III są niestabilne $\mapsto$ małe zmiany konfiguracji początkowej mogą prowadzić do dużych zmian ewolucji czasowej;
- Automaty klasy IV mogą być potencjalnie wykorzystane do obliczeń – istnieją konfiguracje sieci blokujące rozchodzenie się uszkodzeń.

Automaty komórkowe
Parametry

Parametry które charakteryzują rodziny automatów to:

- wymiar D;
- zbiór stanów – w właściwie jego moc k;
- otoczenie – a właściwie jego promień r.

Często do opisanie rodziny automatów korzysta się z notacji (k, r), czyli podając jedynie liczbę dozwolonych stanów i promień otoczenia.

Niestety taka notacja nie mówi nic o typie otoczenia i wymiarze przestrzeni.

Automaty komórkowe

Ewolucja

Najprostszy model to $(2, 1)$, czyli $D = 1$ i mamy 2 stany komórki. Stan komórki w chwili $t + 1$ jest zależny od:

- stanu komórki w chwili t;
- stanu sąsiadów w chwili t.

Jeżeli stan komórki w chwili $t + 1$ zależy tylko od ilości jedynek w jej otoczeniu, to automat taki nazywamy **automatem głosującym**.

Automaty jednowymiarowe

Automaty elementarne

Najprostszą rodzinę automatów dają układy dla $D = 1$, czyli automaty jednowymiarowe.
Automaty jednowymiarowe $(2, 1)$ nazywamy **elementarnymi**.

Automaty jednowymiarowe
Notacja

Automaty jednowymiarowe $(2,1)$ opisuje się podając ich numer skonstruowany poprzez podanie wartości funkcji przejścia. Przykładowo

111	110	101	100	011	010	001	000
0	1	0	1	1	0	1	0

to automat 90 (Rule 90 albo Reguła 90).

Automaty jednowymiarowe

Przykłady klasyfikacji

I. Automaty jednorodne – np. Reguła 222.
II. Automaty periodyczne (regularne) – np. Reguła 190.
III. Automaty chaotyczne – np. Reguła 30.
IV. Automaty złożone – np. Reguła 110.

Automaty jednowymiarowe

Równoważność

Każdy z automatów jest równoważny trzem innym

- zamianę 0 z 1,
- symetrię funkcji względem otoczenia,
- obie powyższe operacje.

Równoważność oznacza, że automaty dają tą samą konfigurację przy odpowiedniej zamianie stanów komórek.

Automaty jednowymiarowe
Równoważność

Przykład 1

Reguła 42 jest równoważna z 171 (zamiana 0 z 1), 112 (symetria otoczenia), 241 (obie operacje).

Przykład 2

Reguła 222 jest równoważna z 132 (zamiana 0 z 1), 222 (symetria otoczenia), 132 (obie operacje).

Automaty dwuwymiarowe
Gra w życie

Life

Gra *Life* pozwala na wykonanie dowolnych obliczeń i jest równoważna modelowi maszyny Turinga. Jest to zatem przykład uniwersalnego modelu obliczeń.

Automaty dwuwymiarowe

Gra w życie

- Bakteria, która ma zero lub jednego sąsiada, umiera z osamotnienia.
- Żywa bakteria, która ma dwóch lub trzech żywych sąsiadów, jest szczęśliwa i żyje nadal.
- W pustym obszarze, który ma trzech sąsiadów, pojawia się, ze względu na optymalne warunki środowiska, żywa bakteria.
-