# Obliczenia inspirowane Naturą

## Wykład 10 - Mrówki w labiryntach

Jarosław Miszczak

IITiS PAN Gliwice

05/05/2016

# Na poprzednim wykładzie

1. ...
2. ...
3. ...

# Wprowadzenie
## Motywacja biologiczna

- Marco Dorigo, 1991 – algorytmy mrówkowe zostały zaproponowane w jego pracy doktorskiej.
- Pomysł opiera się na obserwacji mrówek szukających pożywienia dla swojej koloni i stąd nazwa *ant colony optimization algorithm* (ACO).
- Algorytmy oparte na zasadach ACO stały się bardzo popularne do rozwiązywania problemów związanych optymalizacji dyskretnej, szczególnie związanych z wyszukiwaniem ścieżek w grafach.

# Wprowadzenie

## Motywacja biologiczna

- Społeczeństwa mrówek (i innych owadów) stanowią przykłady bardzo złożonych systemów.
- Pomimo, iż możliwości pojedynczej mrówki są bardzo ograniczone, dzięki współpracy potrafią one na tworzenie bardzo skomplikowanych zachowań i struktur.

### Społeczne zachowania owadów

- Około 2% wszystkich owadów wykazuje zachowania społeczne.
- Połowa owadów które tworzą struktury społeczne to mrówki.
- Mrówki kolonizują Ziemię od 100 milionów lat.

# Wprowadzenie

## Motywacja biologiczna


Inside the ant colony - Deborah M. Gordon
(http://ed.ted.com/lessons/inside-the-ant-colony-deborah-m-gordon)

# Wprowadzenie

## Podstawowe mechanizmy

Przy budowaniu modelu zachowania mrówek ważne jest zauważenie, iż:

- owady są niemal całkowicie ślepe;
- komunikacja między mrówkami odbywa się na zasadzie *stygmergi* (*ang.* stigmergy), czyli modyfikowania swojego środowiska/otoczenia;
- praca wykonywana przez kolonię mrówek znacznie przekracza możliwości każdego osobnika z osobna.

# Wprowadzenie
## Podstawowe mechanizmy

### Stygmergia

Sposób porozumiewania się poprzez wprowadzanie zmian w środowisku, np. poprzez pozostawianie feromonów przez mrówki, tworzenie przez zwierzęta ścieżek do wodopoju lub wyznaczania drogi na skróty.

### Pierre-Paul Grassé, 1959

*Stimulation of workers by the performance they have achieved.*

# Wprowadzenie
## Podstawowe mechanizmy

(Zdjęcie: J.A. Miszczak)

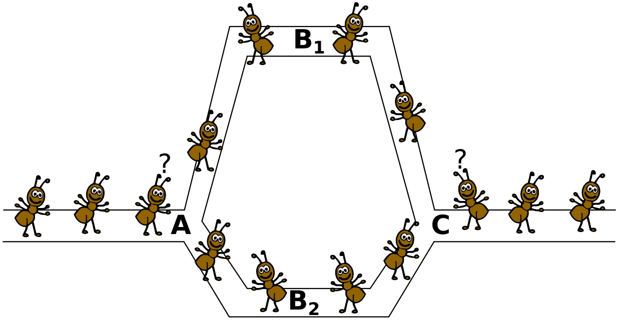
# Wprowadzenie
## Podstawowe mechanizmy

(Zdjęcie: J.A. Miszczak)

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek

## Model zachowania mrówek

Mrówki wyszukujące drogi między punktami **A** (punk decyzyjny 1) i **C** (punkt decyzyjny 2).




(Rysunek mrówki: https://openclipart.org/user-detail/Firkin)

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek
## Model zachowania mrówek

- Każda mrówka ma do wyboru drogi $\mathbf{B}_1$ (dłuższa) i $\mathbf{B}_2$ (krótsza).
- Wybór drogi działa na zasadzie dodatniego sprzężenia zwrotnego.
    - Jeżeli mrówka wybierze krótszą drogę, to jej ślad feromonowy przyczyni się do zwiększenia atrakcyjności tej ścieżki (krótsza droga = częstsze odświeżanie śladu).
    - Jeżeli mrówka wybierze dłuższą, to jej ślad feromonowy zdąży bardziej wyparować.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek

## Model zachowania mrówek

- Zasada działania algorytmów mrówkowych opiera się na odtworzeniu średniego zachowania owadów.
- Ilość feromonu jest proporcjonalna do ilości mrówek.
- Ilość feromonu na ścieżce w chwili $t$ w punkcie $i$ zależy od wybrania tej ścieżki w chwili $t - t_s$ w punkcie $j$ oraz od wybrania tej ścieżki w chwili $t$ w punkcie $i$.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek

## Model zachowania mrówek

- Oznaczamy przez $p_{ia}$ prawdopodobieństwo, że mrówka przybywająca do punktu decyzyjnego $i \in \{1, 2\}$ wybierze drogę $a \in \{s, l\}$.
- Dłuższa ścieżka ma długość $r$-razy większą niż ścieżka krótsza.
- W ciągu sekundy trasę przebywa $\psi$ mrówek – stały przepływ.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek
## Model zachowania mrówek

Prawdopodobieństwo wybrania krótszej drogi wynosi

$$p_{is}(t) = \frac{(k + \phi_{is}(t))^{\alpha}}{(k + \phi_{is}(t))^{\alpha} + (k + \phi_{il}(t))^{\alpha}}$$

gdzie zarówno wartości $\alpha = 2$ oraz $k = 20$, jaki i postać równania zostały dobrane na podstawie eksperymentów.

(J.-L. Deneubourg et al., *The self-organizing exploratory pattern of the Argentine ant*. J. Insect Behav., 3:159–168, 1990. DOI: 10.1007/BF01417909.)

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek
## Model zachowania mrówek

Równania różniczkowe opisujące ewolucję systemu mają postać

$$\frac{\mathrm{d}\phi_{is}(t)}{\mathrm{d}t} = \psi p_{js}(t - t_s) + \psi p_{is}(t) \quad (i = 1, j = 2; i = 2, j = 1)$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi_{il}(t)}{\mathrm{d}t} = \psi p_{jl}(t - r t_s) + \psi p_{il}(t) \quad (i = 1, j = 2; i = 2, j = 1)$$

gdzie $\psi$ to przepływ mrówek, przyjmowany jako stały, a $r = l_l / l_s$ wprowadza opóźnienie wynikające z długości dłuższej ścieżki.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek
## Model zachowania mrówek

W modelu dyskretnym

- interesuje nas średnie zachowanie mrówek;
- liczba mrówek jest liczbą naturalną;
- system jest opisany równaniami różnicowymi.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek

## Model zachowania mrówek

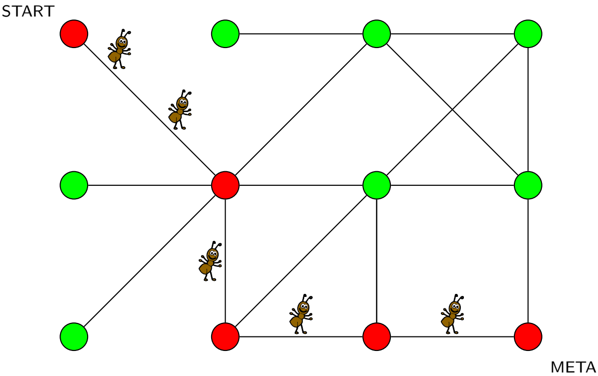
Prawdopodobieństwa wyboru ścieżki, $p_{is}(t)$ oraz $p_{il}(t)$, są funkcjami ilości zdeponowanego feromonu.

$$p_{is}(t) = \frac{(\phi_{is}(t))^{\alpha}}{(\phi_{is}(t))^{\alpha} + (\phi_{il}(t))^{\alpha}}, \quad p_{il}(t) = 1 - p_{is}(t),$$

$i = 1, 2.$

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek

## Wyszukiwanie ścieżki w grafie



# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek

## Wyszukiwanie ścieżki w grafie

- W realnych zastosowaniach grafy które chcemy przeszukiwać są o wiele bardziej złożone niż graf ilustrujący zachowanie prawdziwych mrówek.
- Algorytmy mrówkowe to *metaheurystyka* – zachowanie mrówek daje tylko ogólne wytyczne, które służą do konstrukcji algorytmów.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek

## Wyszukiwanie ścieżki w grafie

### Realne problemy

- W grafach o złożonej strukturze mrówki są podatne na wpadanie w pętle.
- Poprzez dodatnie sprzężenie zwrotne pętle stają się coraz bardziej atrakcyjne.
- Eliminacja śladu dla jednego kierunku nie jest rozwiązaniem.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek
## Algorytm S-ACO

Algorytm S-ACO (Simple Ant Colony Optimization)

- Zwiększenie możliwości mrówek (agentów) poprzez dodanie pamięci.
- Wykorzystanie parowania śladu feromonowego do eliminacji słabych rozwiązań.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek
## Algorytm S-ACO

W S-ACO:

- rozwiązanie budowane jest losowo;
- aktualizacja śladu odbywa się deterministycznie.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek
## Algorytm S-ACO

- S-ACO działa na grafie $(N, A)$ gdzie $N$ to wierzchołki, a $A$ to krawędzie.
- Z każdą krawędzią powiązana jest wielkość $\tau_{ij}$ śladu feromonowego.
- Mrówki mogą odczytywać i zapisywać $\tau_{ij}$.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek
## Algorytm S-ACO

Pierwszym etapem jest budowanie rozwiązań:

- W S-ACO każdy z agentów (czyli mrówek) jest w jednym z dwóch stanów: *poszukiwania* (inaczej *forward*) lub *powrotu* (inaczej *backward*).
- W trybie *poszukiwania* mrówka:
    - porusza się od startu do mety;
    - nie pozostawia śladu feromonowego.
- Ścieżka jest wybierana poprzez losowy wybór następnego węzła z uwzględnieniem śladu feromonowego.
- Mrówka przechodzi do stanu *powrotu* po dotarciu do węzła końcowego.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek
## Algorytm S-ACO

- Początkowe wartości śladu feromonowego są ustalane jako $\tau_{ij} = 1$.
- W węźle $i$ mrówka wybiera następny węzeł jako $j$ z prawdopodobieństwem

$$p_{ij}^{(k)} = \frac{\tau_{ij}^{\alpha}}{\sum_{l \in N_i^{(k)}} \tau_{il}^{\alpha}},$$

gdzie $N_i^{(k)}$ to sąsiedztwo węzła $i$, z wyłączeniem węzła poprzednio odwiedzonego przez mrówkę.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek
## Algorytm S-ACO

W drugim etapie mrówka aktualizuje ślad feromonu:

- Mrówka wraca po **zapamiętanej** ścieżce – przechodzi do trybu *powrotu* (backward).
- Trasa powrotna jest tworzona po wyeliminowaniu pętli.
- W trybie *powrotu* mrówka aktualizuje ślad feromonowy.
- Ilość pozostawionego feromonu jest zależna od jakości rozwiązania – im krótsza ścieżka, tym więcej feromonu.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek
## Algorytm S-ACO

Podczas powrotu $k$-ta mrówka zmienia stan śladu feromonowego według zależności

$$\tau_{ij} = \tau_{ij} + \Delta\tau^{(k)}.$$

Sposób wyboru $\Delta\tau^{(k)}$ jest ważny dla działania algorytmu.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek

## Algorytm S-ACO

W S-ACO dochodzi do parowania pozostawionego śladu feromonowego.

- Parowanie może być ustalone jako stały zanik w czasie.
- Zanikanie śladu pozwala na uniknięcie zbyt szybkiej zbieżności i eliminację słabych rozwiązań.

Zanik śladu nie jest kluczowy dla działania prawdziwych mrówek.

# Metaheurystyka oparta na koloni mrówek
## Algorytm S-ACO

W każdej iteracji algorytmu ślad feromonowy jest zmniejszany zgodnie z regułą

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij}$$

dla wszystkich krawędzi grafu, $(i, j) \in A$, z $\rho \in (0, 1]$.

# Zastosowanie w optymalizacji

## Wprowadzenie

Algorytmy ACO mogą być stosowane do wielu zagadnień *optymalizacji kombinatorycznej*.

- Zadaniem optymalizacji kombinatorycznej jest znalezienie w zbiorze skończonym obiektu *optymalnego*.
- Zadania takie są często łatwe do sformułowania ale okazują się trudne do rozwiązania.
- Kluczowe w zastosowaniu ACO jest znalezienie odpowiedniej reprezentacji problemu.

# Zastosowanie w optymalizacji

## Wprowadzenie

Przykłady

- Znalezienie najkrótszego cyklu Hamiltona w grafie – tzw. problem komiwojażera (ang. *Traveling Salesman Problem* (TSP)). (optymalizacja jest **NP**-trudna, problem decyzyjny jest **NP**-zupełny)
- Problem pakowania plecaka (ang. *knapsack problem*) – mając skończony zbiór obiektów, zapakuj plecak o zadanej objętości tak, żeby zmaksymalizować wartość pakunku. (**NP**-trudny)

# Zastosowanie w optymalizacji
## Wprowadzenie

Instancją problemu optymalizacji kombinatorycznej nazywamy trójkę $(\mathcal{S}, f, \Omega)$, gdzie

- $\mathcal{S}$ to zbiór rozwiązań,
- $f : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$ to funkcja celu,
- $\Omega$ to zbiór ograniczeń.

Zadaniem **minimalizacji** jest znalezienie $s^\star \in \mathcal{S}$ takiego, że $f(s^\star) \leqslant f(s)$ dla $s \in \mathcal{S}$.

# Zastosowanie w optymalizacji
## Wprowadzenie

Każdy problem optymalizacji dyskretnej ma wersję decyzyjną.

### Wersja decyzyjna

Czy dla zadanego parametru $\rho$ istnieje rozwiązanie $s$ takie że $f(s) \leqslant \rho$?

# Zastosowanie w optymalizacji

## Wprowadzenie

- Algorytm dokładny – gwarantuje znalezienie optymalnego rozwiązania.
- Algorytm przybliżony – rezygnujemy z optymalności na rzecz wydajności.

# Zastosowanie w optymalizacji

## Reprezentacja

### Problem

Przedstawienie problemu w sposób przystosowany do zasad działania mrówek.

# Zastosowanie w optymalizacji

## Reprezentacja

Reprezentacja na potrzeby ACO ma następujące składniki:

- Skończony zbiór *komponentów* $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_{N_c}\}$.
- *Stany* określone jako skończone ciągi elementów zbioru $C$. Zbiór wszystkich stanów oznaczamy przez $\mathcal{X}$.
- Zbiór rozwiązań $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ i zbiór dopuszczalnych rozwiązań $\tilde{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{X}$, czyli takich które spełniają warunki $\Omega$.
- Niepusty zbiór rozwiązań optymalnych $\mathcal{S}^\star \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$.
- Funkcja kosztu zdefiniowana dla każdego $s \in \mathcal{S}$.

# Zastosowanie w optymalizacji

## Reprezentacja

W algorytmach ACO, mrówki to procedury, które probabilistycznie budują rozwiązania problemu poruszając się po grafie pełnym $G_C = (C, E)$, gdzie $E$ to krawędzie łączące wszystkie wierzchołki.

### Informacja heurystyczna

W wielu wypadkach oprócz śladu feromonowego mówki korzystają z *informacji heurystycznej*, $\eta_{ij}$, która wpływa na wybór ścieżki.

Czasem pozwala się, żeby mrówki budowały *niedopuszczalne* rozwiązania.

# Zastosowanie w optymalizacji

## Problem komiwojażera

### Problem komiwojażera

Znalezienie minimalnego cyklu Hamiltona w pełnym grafie ważonym $G = (N, E)$ dla zbioru miast $N$ oraz krawędzi $E$.

- Waga jest tu interpretowana jako odległość między miastami.
- Wagi są wykorzystywane do konstrukcji rozwiązań – mrówki chętniej wybierają bliższe miasta.

# Zastosowanie w optymalizacji
## Problem komiwojażera

- Każdy z $n = |G|$ węzłów grafu ma być odwiedzony tylko raz.
- Funkcja
$$f(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} d_{\pi(i)\pi(i+1)} + d_{\pi(n)\pi(1)}$$
ma być minimalizowana.

# Zastosowanie w optymalizacji

## Problem komiwojażera

- Graf dla problemu jest grafem pełnym.
- Komponentami są węzły grafu.
- Stanem jest ciąg odwiedzanych miast.

# Zastosowanie w optymalizacji
## Problem komiwojażera

- Ograniczenia na zbiór dozwolonych rozwiązań: każdy węzeł ma być odwiedzony dokładnie raz.
- W węźle $i$ mrówka wybiera następny węzeł jako $j$ z prawdopodobieństwem

$$p_{ij}^{(k)} = \frac{\tau_{ij}^{\alpha}\eta_{ij}^{\beta}}{\sum_{l \in N_i^{(k)}} \tau_{il}^{\alpha}\eta_{ij}^{\beta}},$$

gdzie $\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$.

# Zastosowanie w optymalizacji

## Problem komiwojażera

- Warunek jednokrotnego odwiedzenia miast jest zachowany poprzez przechowywanie listy odwiedzonych miast – *lista tabu*.
- Po odwiedzeniu wszystkich miast lista jest czyszczona.

# Zastosowanie w optymalizacji

## Problem komiwojażera

Aktualizacja śladu feromonowego może być wykonywana na różne sposoby:

- model gęstościowy – każda mrówka pozostawia stałą ilość feromonu, $\tau_{ij} \mapsto \tau_{ij} + Q_1$.
- model ilościowy – ilość pozostawionego feromony zależy jest odwrotnie proporcjonalna do długości krawędzi, $\tau_{ij} \mapsto \tau_{ij} + \frac{Q_2}{d_{ij}}$;
- model cykliczny – ilość feromony jest odwrotnie proporcjonalna od długości trasy przebytej do tej pory przez mrówkę.

# Zastosowanie w optymalizacji

## Dyskretny problem plecakowy

- Mamy do dyspozycji zbiór obiektów $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ oraz plecak o pojemności $B$.
- Każdy obiekt ma swoją wielkość $w_i$ oraz wartość $c_i$.
- Zadaniem jest maksymalizacja

$$\sum_i c_i x_i$$

przy założeniu

$$\sum_i w_i p(x_i) \leqslant B,$$

gdzie $p(x_i) \in \{0, 1\}$ (czyli każdy obiekt może być spakowany najwyżej raz).

# Zastosowanie w optymalizacji

## Dyskretny problem plecakowy

- Komponentami są pakowane przedmioty,
- Graf konstrukcyjny to graf zupełny.
- Prawdopodobieństwa przejścia są postaci

$$p_{ij} = \frac{\mu_{ij}^{\alpha}\tau_{ij}^{\beta}}{\sum_{j \in N_i} \mu_{ij}^{\alpha}\tau_{ij}^{\beta}}$$

# Zastosowanie w optymalizacji

## Dyskretny problem plecakowy

Informacja heurystyczna może być określona na różne sposoby

- $\mu_i = \frac{z_j}{w_j/B_c}$, gdzie $B_c$ to dostępna objętość plecaka,
- $\mu_i = \frac{z_j}{w_j/B}$,
- $\mu_i = \frac{z_j}{w_j^2}$

(K. Schiff, *Ant colony opimization algorithm for the 0-1 knapsack problem*, Czasopismo Techniczne. Automatyka — 2013 tom R. 110, z. 3-AC 39–52)

# Podsumowanie

- Oprogramowanie i inne zasoby związane z ACO: http://www.aco-metaheuristic.org/
- Wykład Paweła Paducha, Obliczenia Naturalne, Politechnika Świętokrzyska, 2014 (http://achilles.tu.kielce.pl/Members/ppaduch/wyk142ady/obliczenia-naturalne/)
- Marco Dorigo, Thomas Stützle, *Ant Colony Optimization*, MIT Press, 2003.