Obliczenia inspirowane Naturą (odpowiedzi do kolokwium zaliczeniowego)

Jarosław Miszczak
https://www.iitis.pl/˜miszczak/natcomp/

31/05/2016 (v. 0.02)

Zadanie 1: **P** – polynomial time, **NP** – nondeterministic polynomial time.

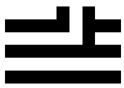
$$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}.$$

Każdy algorytm działający w czasie wielomianowym na deterministycznej maszynie Turinga, będzie dział w czasie wielomianowym na niedeterministycznej maszynie Turinga. Wszystko wskazuje na to, że $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

Zadanie 2: Automat 31 ma funkcję przejścia:

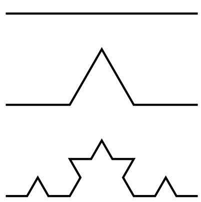
111	110	101	100	011	010	001	000
0	0	0	1	1	1	1	1

W wyniku działania na 000010100 w pierwszych pięciu krokach uzyskujemy:



Jest to automat periodyczny.

Zadanie 3: Krzywą Kocha w dwóch pierwszych krokach iteracji daje krzywe



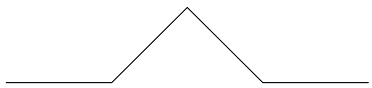
o długościach odpowiednio 1, $\frac{4}{3}$ i $\frac{16}{9}$, czyli w n-tej iteracji krzywa ma długość $\frac{4^n}{3^n}$.
Wymiar pudełkowy to graniczny stosunek logarytmu z przyrostu liczby odcinków do logarytmu z odwrotności ich długości, czyli w tym wypadku

$$d_B = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n}{\ln \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26186 > 1.$$

Zadanie 4: Jedna iteracja L-systemu:

- aksjomat: F
- stałe: +, −
- reguły: F → F+F−−F+F

przyjmując, że F to rysowanie odcinka, + to obrót to 60° w lewo, a − to obrót o 60° w prawo, daje



Zadanie 5: Strategia ewolucyjna $(1 + 1)$ z siła mutacji σ pozawala nam na zmianę w jednym kroku wartości szukanego argumentu o σ. Zatem aby dotrzeć z $x = 0$ do $x = 5$ potrzebujemy co najmniej $\frac{5}{\sigma}$ kroków.

Jeżeli siła mutacji będzie zmienna, to postępujemy zgodnie z regułą 1/5 sukcesów. Przyjmijmy, że kontrolujemy siłę mutacji biorąc pod uwagę $k = 2$ kroków. Jeżeli w trakcie $k = 2$ pierwszych kroków zbliżyliśmy się do minimum, to siła mutacji zwiększa się o 1.22, po kolejnym kroku będzie wynosiła 1.48 wartości początkowej. Biorąc przykładowo $\sigma = 1$, możemy dotrzeć w czterech krokach do $x = 4.708$.

Zadanie 6: Funkcja $f(x_1x_2x_3x_4x_5) = \sum_1^4 x_i \oplus x_{i+1}$ daje następujące wartości przystosowania i prawdopodobieństwa selekcji dla populacji początkowej

X_1	10100	3	$\frac{3}{9}$
X_2	11110	1	$\frac{1}{9}$
X_3	01000	2	$\frac{2}{9}$
X_4	01011	3	$\frac{3}{9}$

Funkcja f określa ile jest zmian w ciągu.

Przyjmijmy dwa bity na określenie pozycji na której będziemy dokonywali krzyżowania. W ten sposób ciąg 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 określa, że krzyżowanie dokonuje się na pozycji 3 dla najlepszych i na pozycji 4 dla najsłabszych. Populacja po krzyżowaniu ma następujące wartości przystosowania

X_1'	10111	2	$\frac{2}{7}$
X_2'	11110	1	$\frac{1}{7}$
X_3'	01000	2	$\frac{2}{7}$
X_4'	01000	2	$\frac{2}{7}$

Zadanie 7: Przyjmując początkowe położenia i prędkości $X_0^1 = (0, 1), X_0^2 = (1, 0), V_0^1 = (1, 1), V_0^2 = (2, 0)$, najlepsze położenia dla cząstek są określone jako $X_b^1 = X_0^1$, $X_b^2 = X_0^2$, a dla roju jako $X_b = X_0^1$.

Z ciągu losowego 1 1 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 bierzemy po trzy bity, co daje ze zbioru $\{1/8, 2/8, \ldots, 1\}$ kolejno elementy 1, 7/8, 3/8, 3/8, 1/8, 2/8, 4/8, 4/8, 6/8.

Nowe prędkości są obliczane jako

$$V_1^{1,1} = 1 \cdot V_0^{1,1} + 1 \cdot 1 \cdot (X_0^{1,1} - X_0^{1,1}) + 2 \cdot \frac{7}{8} \cdot (X_0^{1,1} - X_0^{1,1}) = 1$$
$$V_1^{1,2} = 1 \cdot V_0^{1,2} + 1 \cdot \frac{3}{8} \cdot (X_0^{1,2} - X_0^{1,2}) + 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot (X_0^{1,2} - X_0^{1,2}) = 1$$

oraz

$$V_1^{2,1} = 1 \cdot V_0^{2,1} + 1 \cdot \frac{1}{8} \cdot (X_0^{2,1} - X_0^{2,1}) + 2 \cdot \frac{2}{8} \cdot (X_0^{1,1} - X_0^{2,1}) = \frac{3}{2},$$
$$V_1^{2,2} = 1 \cdot V_0^{2,2} + 1 \cdot \frac{4}{8} \cdot (X_0^{2,2} - X_0^{2,2}) + 2 \cdot \frac{4}{8} \cdot (X_0^{1,2} - X_0^{2,2}) = 1$$

gdzie liczby losowane są dla każdej współrzędnej.

Nowe położenia są obliczane jako

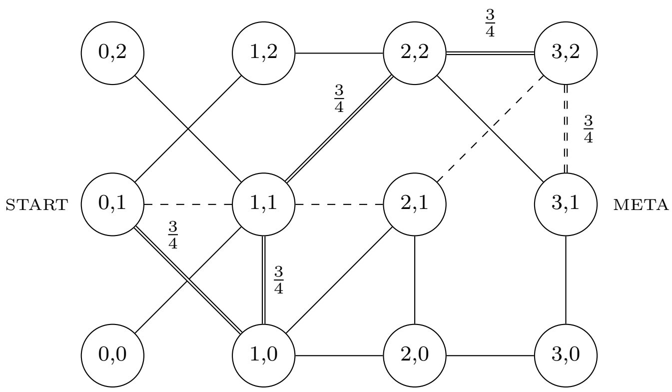
$$X_1^1 = X_0^1 + V_1^1 = (1, 2)$$

oraz

$$X_1^2 = X_0^2 + V_1^2 = (5/2, 1).$$

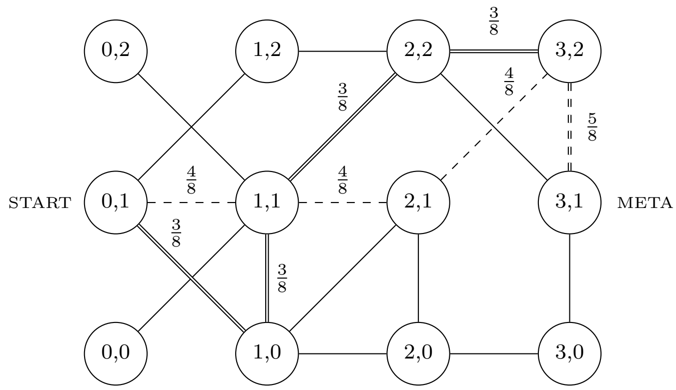
Zadanie 8: Przyjmujemy, początkowy poziom feromonu $\tau_{ij} = 1$, przyrost feromonu $\Delta\tau = 1/2$ oraz globalne parowanie feromonu $\rho = 1/2$ po aktualizacji.

Pierwsza iteracja – po drodze zaznaczonej podwójną linią – daje



oraz $\frac{1}{2}$ na pozostałych ścieżkach.

Druga iteracja – po drodze zaznaczonej podwójną przerywaną – daje



oraz $\frac{1}{4}$ na pozostałych ścieżkach.

Zadanie 9: Macierze w notacji Diraca:

a) $\left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{smallmatrix}\right) = |2\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 2|,$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&\sqrt{2}&0\\ 1&0&-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 0| + \sqrt{2}|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| - |0\rangle\langle 2|\Big).$

Zadanie 10: Operacje w postaci macierzy:

a) Przy założeniu że pierwszy rejestr jest dwustanowy

$$|1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x + |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{smallmatrix}\right),$$

b) Przy założeniu że pierwsze dwa rejestry są dwustanowe

$$|1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes \sigma_x + |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes H = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right),$$

c) Przy założeniu że pierwszy rejestr jest trójstanowy

$$|0\rangle\langle 0| \otimes \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{smallmatrix}\right) + (\mathbb{I} - |0\rangle\langle 0|) \otimes \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0&0&0\\ 0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$