Mechanika kwantowa II
Wykład dla studentów fizyki teoretycznej

Sławomir Bugajski
Redakcja: Jarosław A. Miszczak[1]

Ostatnia modyfikacja: 9 Czerwca 2005

[1]E-mail: miszczak@iitis.gliwice.pl

Spis treści

Program wykładu „Mechanika kwantowa II”

Informacje ogólne

Wykład, przeznaczony dla studentów fizyki którzy wybrali specjalizację teoretyczną, ma na celu uzupełnienie i rozszerzenie kursowego wykładu mechaniki kwantowej. Wykładowi towarzyszą ćwiczenie prowadzone metodą seminaryjną, ich celem jest zilustrowanie materiału przykładami z aktualnego frontu badań fizyki oraz wyjaśnienie trudniejszych problemów w drodze dyskusji. Wykład obejmuje 30 godzin zajęć (2 godziny w tygodniu) w semestrze zimowym, to samo dotyczy ćwiczeń. Wykład kończy się egzaminem w sesji zimowej.

Plan wykładu

1. **Uściślenie i rozszerzenie podstaw mechaniki kwantowej:** pojęcie ośrodkowej przestrzeni Hilberta, najważniejsze klasy operatorów na przestrzeni Hilberta, opis stanów przy pomocy operatorów statystycznych,iloczyn tensorowy przestrzeni Hilberta, suma prosta przestrzeni Hilberta.

2. **Kwantowy opis układów złożonych:** interpretacja fizyczna iloczynu tensorowego przestrzeni Hilberta, obserwable podukładów, ślad częściowy i redukcja stanu układu złożonego, holizm kwantowy i paradoks Einsteina, Podolskiego i Rosena, rozwój w czasie układu złożonego i podukładów, podstawy kwantowej teorii układów otwartych, problem pomiaru w mechnice kwantowej i problem dekoherencji.

3. **Kwantowa teoria układów z nieograniczoną ilością cząstek:** interpretacja fizyczna sumy prostej przestrzeni Hilberta, reguły superselekcji i obserwable klasyczne, cząstki identyczne i przestrzeń Foka, cząstki nierozróżnialne, stany symetryczne i antysymetryczne, paracząstki, operatory konstrukcji, podstawy drugiego kwantowania, kwantowe relatywistyczne pole kwantowe, granice stosowalności formalizmu przestrzeni Foka: model van Hove'a i model BCS.

Katowice, 16. XI 1994

S. Bugajski

Rozdział 1

Podstawy matematyczne

"(...) in all properly formulated physical ideas there is an economy of thought which is beautiful to contenplate. I have always been concerned that this esthetic aspect of a well-exppressed physical theory is just as indispensable as its agreement with experiances. Only beauty can lead to that ...."

1.1 Teoria miary

Doskonały wykład teorii miary znaleźć można w książce [Sik58].

1.1.1 Pewne struktury zbiorów

Definicja 1.1 *Niepustą rodzinę $\mathfrak{m}$ podzbiorów zbioru X nazywamy ciałem (lub algebrą) zbiorów, jeżeli*

1. $\bigwedge_{A\in\mathfrak{m}} X \setminus A \in \mathfrak{m}$
2. $\bigwedge_{A,B\in\mathfrak{m}} A \cup B \in \mathfrak{m}$

Jak łatwo pokazać z powyższej definicji wynikają następujące własności

1. $X, \emptyset \in \mathfrak{m}$
2. $\bigwedge_{A,B\in\mathfrak{m}} A \cap B, A \setminus B \in \mathfrak{m}$

Jeżeli X jest dowolnym zbiorem, to wszystkie poniższe zbiory są ciałami podzbiorów zbioru X

1. $\{\emptyset, X\}$ (ciało nie może być mniejsze)
2. 2^X (ciało nie może być większe)

Definicja 1.2 *Niepustą rodzinę $\mathfrak{m}$ podzbiorów zbioru X nazywamy σ-ciałem (lub σ-algebrą) zbiorów, jeżeli*

1. $\bigwedge_{A\in\mathfrak{m}} X\setminus A\in\mathfrak{m}$

2. $\bigwedge_{A_1,\ldots,A_n,\ldots\in\mathfrak{m}} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathfrak{m}$

Dla dowolnej rodziny podzbiorów zbioru X istnieje najmniejsze σ-ciało zawierające tą rodzinę. Zdefiniowane jest ono w następujący sposób:

Definicja 1.3 *Niech $\mathcal{R}$ będzie pewną rodziną podzbiorów zbioru X. Rodzinę*

$$\sigma(R)=\bigcap\{\mathfrak{m}\in 2^X \mid \mathcal{R}\subset\mathfrak{m}\wedge\mathfrak{m}\ \textit{jest}\ \sigma\textit{-ciałem}\ \}$$

nazywamy σ-ciałem generowanym przez rodzinę $\mathcal{R}$.

Przykład 1.1 *Niech τ będzie rodziną zbiorów otwartych na prostej. Rodzinę $\sigma(\tau)$ nazywamy rodzina zbiorów borelowskich.*

Definicja 1.4 *Parę $(X,\mathfrak{m})$ gdzie X jest pewnym zbiorem, a $\mathfrak{m}$ σ-ciałem podzbiorów zbioru X nazywamy przestrzenią mierzalną.*

1.1.2 Miara

Definicja 1.5 *Niech $\mathfrak{m}$ będzie σ-ciałem podzbiorów zbioru X. Funkcję rzeczywistą $\mu:\mathfrak{m}\to[0,\infty]$ nazywamy miarą jeżeli*

1. $\mu(\emptyset)=0$

2. $\bigwedge_{A_1,\ldots,A_n,\ldots\in\mathfrak{m}}(\bigwedge_{i,j} A_i\cap A_j=\emptyset\Rightarrow\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n))$

Inaczej mówiąc miara jest to rzeczywista, nieujemna, przeliczalnie addytywna (σ-addytywna) funkcja zbioru.

Definicja 1.6 *Trójkę $(X,\mathfrak{m},\mu)$ gdzie X jest pewnym zbiorem, $\mathfrak{m}$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru X, a μ jest miarą na $\mathfrak{m}$ nazywamy przestrzenią z miarą.*

Przykład 1.2 (Miara Lebesgue'a) *Miara Lebesgue'a na przestrzeni $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ jest generowana przez funkcję $\mu((a,b))=b-a$ dla dowolnego odcinka otwartego (a,b), $a,b\in\mathbb{R}$ $a<b$. Dowodzi się że funkcja ta ma jednoznaczene rozszerzenie na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ i że to rozszerzenie jest miarą.*

Definicja 1.7 *Mówimy że dwie miary μ_1 i ν_2 są wzajemnie osobliwe jeżeli istnieje $X\in\mathcal{B}(R)$ taki że $\mu_1(X)=0$ i $\mu_2(\mathbb{R}\backslash X)=0$.*

Definicja 1.8 *Mówimy że miara μ jest σ-skończona, jeżeli*

1.1.3 Funkcje mierzalne

Definicja 1.9 *Niech dane będą przestrzenie mierzalne* $(X_1, \mathfrak{m}_1)$ *oraz* $(Y, \mathfrak{n})$. *Funkcję* $f : X \to Y$ *nazywamy mierzalną jeżeli* $\bigwedge_{A \in \mathfrak{n}} f^{-1}(A) \in \mathfrak{m}$

Przykład 1.3 *Funkcje mierzalne względem* σ*-ciała podzbiorów zbioru* X *generowanego przez topologię na* X *nazywamy funkcjami borelowskimi. Funkcjami borelowskimi są w szczególności funkcje ciągłe.*

1.1.4 Całka

Definicja 1.10 *Całką funkcji prostej względem miary* μ *nazywamy*

$$\int f \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

Całkę dowolnej funkji określamy wykorzystując powyższą definicję oraz określenie zbieżności według miary.

Definicja 1.11 *Mówimy że ciąg funkcji prostych* $\{f_n\}$ *jest zbieżny według miary do funkcji* f *jeżeli*

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \lim_{n \to \infty} \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \epsilon\}) = 0$$

Zbieżnośc według miary oznaczamy przez $f_n \xrightarrow{\mu} f$

Definicja 1.12 *Funkcja jest całkowalna na* $(X, \mathfrak{m}, \mu)$ *jeżeli jest mierzalna i istnieje ciąg funkcji prostych zbieżny według miary do funkcji* f.

Definicja 1.13 *Całką funkcji całkowalnej* f *nazywamy*

$$\int f \mathrm{d}\mu := \lim_{n \to \infty} \int f_n \mathrm{d}\mu$$

Przykład 1.4 *Całką Lebesgue'a z funkcji całkowalnej* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nazywamy całkę funkcji* f *względem miary Lebesgue'a 1.2.*

1.1.5 Twierdzenie Radona-Nikodyma

Niech μ, ν będą miarami na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathfrak{m})$.

Definicja 1.14 *Mówimy że* ν *jest absolutnie ciągła względem* μ *wtedy, i tylko wtedy gdy*

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{B}} \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

Twierdzenie 1.1 (Radona-Nikodyma) *Miara ν jest absolutnie ciągła względem miary μ wtedy, i tylko wtedy gdy istnieje mierzalna funkcja $f :\to \mathbb{R}$ taka, że*

$$\bigwedge_{A\in\mathcal{B}} \nu(A) = \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Co więcej f jest określona jednoznacznie prawie wszędzie względem miary μ (tj. że niejednoznaczność może być tylko na zbiorze miary zero), jest ograniczona i nieujemna.

Funkcję f określona powyżej nazywamy pochodną Radona-Nikodyma; oznaczamy $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

1.2 Iloczyn tensorowy miar

1.3 Prawdopodobieństwo

Rozwój teorii prawdopodobieństwa nie byłby możliwy bez precyzyjnego sformułowania czym jest samo prawdopodobieństwo. Narzędziem pozwalającym na dokonanie tego jest teoria miary.

1.3.1 Aksjomatyka Kołmogorowa

Definicja 1.15 *Niech Ω będzie pewnym zbiorem, a $\mathcal{B}$ – σ-ciałem jego podzbiorów. Prawdopodobieństwem P nazywamy miarę na $\mathcal{B}$, spełniająca warunek $P(\Omega) = 1$.*

1.3.2 Zmienne losowe

Definicja 1.16 *Zmienną losowa nazywamy funkcję rzeczywistą mierzalną na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathcal{B})$.*

Jeżeli μ jest miarą probabilistyczą, to $\int f\mathrm{d}\mu$ jest wartością średnią (wartością oczekiwaną, nadzieją matematyczną) zmiennej losowej f względem miary μ Jeżeli ν jest miarą probabilistyczną na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, to jej pochodna Radona-Nikodyma względem miary Lebesgue'a μ nazywana jest gestością prawdopodobieństwa.

1.4 Przestrzenie Hilberta

Areną na której rozgrywają się wydarzenia teorii kwantowej jest przestrzeń Hilberta. Aktorami występującymi w przedstawieniu są ntomiast operatory liniowe działające na tej przestrzeni.

W tym podrozdziale skupimy się na elementach teorii przestrzeni Hilberta potrzebnych w dalszej części książki. Czytelnika zainteresowanego pogłębieniem swojej wiedzy odsyłamy do pozycji [Mau59, Mla87, Rud01]

1.4.1 Podstawowe definicje

Definicja 1.17 *Iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej $\mathcal{H}$ nazywamy odwzorowanie $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ spełniające warunki*

1. $\langle f|f\rangle > 0 \wedge (\langle f|f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0)$
2. $\langle f|g\rangle = \langle f|g\rangle^*$
3. $\langle f|g + h\rangle = \langle f|g\rangle + \langle f|h\rangle$
4. $\langle f|\lambda h\rangle = \lambda\langle f|h\rangle$

Przykład 1.5 *Poniżej podajemy najczęściej spotykane przykłady przestrzeni Hilberta*

- $\mathbb{C}^n := \{(x_1, \ldots, x_n)|x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}\}$ *z iloczynem skalarnym zadanym przez* $\langle f|g\rangle := \sum_{i=1}^{n} f_i{}^* g_i$
- $l^2 := \{(x_1, \ldots, x_n, \ldots)|x_1, \ldots, x_n, \ldots \in \mathbb{C}\}$ *z iloczynem skalarnym zadanym przez* $\langle f|g\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} f_i{}^* g_i$
- $L^2(X, \mathfrak{m}, \mu)$ *– przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem na przestrzeni* $(X, \mathfrak{m}, \mu)$ *z ośrodkową miarą* μ

Twierdzenie 1.2 (Riesza-Fishera) *Przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ jest izomorficzna z $\mathbb{C}^n$ gdy jest skończenie wymiarowa lub z l^2 gdy jest nieskończenie wymiarowa.*

Tak więc badanie nieskończenie wymiarowych przestrzeni Hilberta sprowadza się do badania przestrzeni ℓ^2.

1.4.2 Operatory liniowe ograniczone

Definicja 1.18 *Operatorem liniowy na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ nazywamy odwzorowanie liniowe $T : D(T) \to \mathcal{H}$ spełniające warunek*

$$\bigwedge_{x,y\in\mathcal{H}} \bigwedge_{\alpha,\beta\in\mathbb{C}} T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

Zbiór tych elementów $\mathcal{H}$ na których określony jest operator T nazywamy daiedziną operatora i oznaczamy przez $D(T)$.

W zbiorze operatorów linoiwych na $\mathcal{H}$ możemy wprowadzić w naturalny sposób działania dodawania operatorów i monożenia operatorów przez liczbę zespoloną. W ten sposób zbiór ten zyskuje strukturę przestrzeni liniowej.

Normę operatora definujemy w następujący sposób

Definicja 1.19

$$||T|| = \sup_{x \in D(T)} ||Tx||$$

Wygodniej jest korzystać z następującego określenia normy

Twierdzenie 1.3 $||T|| = \sup_{||x||=1} ||Tx||$

Definicja 1.20 *Operatro liniowy T na $\mathcal{H}$ nazywamy ograniczonym jeżeli jego norma jest skończona.*

Zbiór operatorów liniowych na $\mathcal{H}$ oznaczamy przez $B(\mathcal{H})$

Definicja 1.21 *OPerator T jest ciągły w $x \in D(T)$ jeżeli dla dowolnego ciągu elementów $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mamy*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$$

Poniższe twierdzenie odnosi się także do ogólnego przypadku odwzorowania liniowego pomiędzy przestrzeniami unormowanymi.

Twierdzenie 1.4 *Niech T będzie operatorem na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(a) T jest ciągły w jednym punkcie

(b) T jest ciągły wszędzie

(c) T jest ograniczony

Dla danego operatora ograniczonego istnieje dokładnie jeden operator T^*, nazywany operatorem sprzężonym do T, taki że

$$\bigwedge_{f,g\in\mathcal{H}} \langle T^* f|g\rangle = \langle f|Tg\rangle$$

Zachodzą następujące własności

(i) $T_1 T_2{}^* = T_2{}^* T_1{}^*$

(ii) $\bigwedge_{\lambda\in\mathbb{C}} \lambda T^* = \lambda^* T^*$

(iii) $T_1 + T_2{}^* = T_1{}^* + T_2{}^*$

(iv) $T^{**} = T$

(v) $||T^*|| = ||T||$

(vi) $||T^*T|| = ||T||^2$

(vii) Jeżeli istnieje T^{-1} to $T^{*-1} = T^{-1*}$

Definicja 1.22 *Operator nazywamy samosprzężonym (lub symetrycznym) jeśli jest ograniczony i równy swojemu sprzężeniu.*

Twierdzenie 1.5 (Hellingera-Teplitza) *Operator T określony na całej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i spełniający warunek $\bigwedge_{f,g\in\mathcal{H}} \langle f|Tg\rangle = \langle Tf|g\rangle$ jest ograniczony.*

Zbiór operatorów ograniczonych określonych na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oznaczamy przez $\mathcal{L}(H)$. Działania w tym zbiorze określamy w następujący sposób: dla dowolnego $f \in \mathcal{H}$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$

(a) $(T_1 + T_2)(f) = T_1(f) + T_2(f)$

(b) $(\lambda T)(f) = \lambda T(f)$

(c) $(T_1T_2)(f) = T_1(T_2(f))$

Przestrzeń $\mathcal{L}(H)$ stanowi zespolona przestrzeń Banacha – jest unormowaną, zupełną przestrzenią liniową.

Podzbiór operatorow samosprzężonych w $\mathcal{L}(H)$ oznaczamy przez $\mathcal{L}_S(H)$. Z normą operatorową i działaniami dodawania i mnożenia jest on rzeczywistą przestrzenią Banacha.
W przestrzeni tej można wprowadzić porządek liniowy i określić dodatniość operatorów

Definicja 1.23 *Mówimy że operator $T \in \mathcal{L}_S(H)$ jest dodatni jeżeli*

$$\bigwedge_{f\in\mathcal{H}} \langle Tf|f\rangle \geqslant 0.$$

1.4.3 Operatory klasy śladowej

Definicja 1.24 *Niech dana będzie baza $\{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oraz niech $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ będzie ododatni na $\mathcal{H}$. Śladem operatora A nazywamy liczbę*

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle\psi_n|A\psi_n\rangle$$

Dla dowolnych $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$ zachodzą następujące relacje

1. $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$,
2. $\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\mathrm{Tr}(A)$,
3. $\mathrm{Tr}(UAU^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$ gdzie U jest operatorem unitarnym,

4. $0 \leqslant A \leqslant B \Rightarrow \mathrm{Tr}(A) \leqslant \mathrm{Tr}(B)$.

Ślad jest funkcjonałem rzeczywistym na $\mathcal{L}_S(\mathcal{H}^+)$, o wartościach w $[0, \infty]$.
Warość bezwzględną operatora definujemy w następujący sposób

Definicja 1.25 $|A| := \sqrt{A^*A}, \quad A \in \mathcal{L}_S(\mathcal{H}^+)$

i wykorzystując tą definicję określamy

Definicja 1.26 *Operator $A \in \mathcal{L}_S(\mathcal{H}^+)$ nazywamy operatorrem klasy śladowej (operatorem śaldowym), jeżeli* $\mathrm{Tr}|A| < \infty$ *Zbiór operatorów klasy śaldowej oznaczamy przez $\mathcal{T}_S(\mathcal{H})$. Ma on następujące własności*

a) $\mathcal{T}_S(\mathcal{H})$ *jest rzeczywistą przestrzenią wektorową.*

b) $A \in \mathcal{T}_S(\mathcal{H}) \wedge B \in \mathcal{T}_S(\mathcal{H}) \Rightarrow AB \in \mathcal{T}_S(\mathcal{H}) \wedge BA \in \mathcal{T}_S(\mathcal{H})$ *przy czym* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

c) $||A||_1 := \mathrm{Tr}|A|$ *jest normą na $\mathcal{T}_S(\mathcal{H})$, zwaną normą śladową. Przestrzeń $\mathcal{T}_S(\mathcal{H})$ z normą śladową jest rzeczywistą przestrzenią Banacha.*

1.4.4 Operatory nieograniczone

Zgodnie z twierdzeniem 1.5 operator samosprzężony określony na całej przestzrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ musi być ograniczony. Tymczasem mechanika kwantowa wymaga operatorów nieograniczonych, które w związku z powyższym nie mogą być określone na całej przestrzeni Hilberta.

Operator liniowy T w ogólności nie musi być określony na całej przestrzeni Hilberta. Podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathcal{H}$ na której jest on określony nazywamy dziedziną operatora i oznaczamy przez $D(T)$. Dziedzina nie musi być zbiorem domkniętym.

Operator ograniczony określony na $D(T)$ można jednoznacznie rozszeżyć na domknięceie $D(T)$, a nie jednoznacznioe na całą $\mathcal{H}$. Dlatego w wypadku operatorów ograniczonych można bez straty ogólnośći rozpatrywać $\mathcal{L}(H)$. Zapis $T_1 \supset T$ oznacza, iż operator T_1 jest rozszerzeniem operatora T.

Aby mówić o operatorze nieograniczonym musimy najpierw zadać jego (gęstą) dziedzinę, a potem określić jego działanie na wektorach z tej dziedziny.

Przykład 1.6 *Niech $\{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ będzie bazą w $\mathcal{H}$.*

(a) Definujemy operator T_1 na $\mathcal{H}$ w następującyn sposób:

(i) $T_1\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, *gdzie* $\lambda_n \in \mathbb{R}$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$

(ii) na pozostałych przez liniowość

Operator T_1 jest ograniczony i samosprzężony *(b) Definujemy operator T_2 na $\mathcal{H}$ następująco:*

(i) $T_2\varphi_n = n\varphi_n$

(ii) rozszerzamy przez liniowość gdzie się da

Operator T_2 ma dziedzianę $D(T_2)$ złożoną ze wszystkich kombinacji liniowych $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n$ takich, że $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|x_n|^2 < \infty$. $D(T_2)$ jest gęstą podprzestrzenią w $\mathcal{H}$. Operator T_2 jest nieograniczony ponieważ $||T_2\varphi_n|| = n$. Operator ten jest także ciągły.

(c) Weźmy phrzestrzeń Hilberta $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ oraz $D(Q)$ będzie zbiorem funkcji $D(Q) := \{\phi \in L^2(\mathbb{R}) | \int_{\mathbb{R}} x^2|\phi(x)|^2 < \infty\}$. Definujemy operator położenia Q nastepująco:

$$\bigwedge_{\phi \in D(Q)} (Q\phi)(x) := x\phi(x)$$

Operator ten jest nieograniczony i ma dziedzinę gęstą w $\mathcal{H}$.

(d) Określamy $D(P) := \{\phi \in L^2(\mathbb{R}) | \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \in L^(\mathbb{R})\}$. Określamy operator pędu

$$\bigwedge_{\phi \in D(P)} (P\phi)(x) := -i\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}\phi(x)$$

Sprzężenie operatorna nieograniczonego

Nich $D(T)$ będzie gęstym podzbiorem przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Ustalmy $f \in D(T)$. Jeżeli istnieje $f^* \in D(T)$ takie, że $\langle f|Tg\rangle = \langle f^*|g\rangle$ dla każdego $g \in D(T)$.

1.4.5 Zbieżność w przestrzeni Hilberta

W tej sekcji zebrane zostały definicje i pewne twierdzenie dotyczące zbieżnosc ciągów operatorow określonych na przestrzniach Hilberta [GI89].

Niech $\{T_n \in \mathrm{B}(\mathcal{H}) | n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem operatorów.

Definicja 1.27 (Zbieżność słaba) *Ciąg $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy zbieżnym słabo do $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ jeżeli*

$$\bigwedge_{\varphi,\psi \in \mathcal{H}} \lim_{n\to\infty} \langle T_n\varphi|\psi\rangle = \langle T\varphi|\psi\rangle$$

Oznaczamy to pisząc $\mathrm{w-}\lim_{n\to\infty} T_n = T$

Zbieżnośćią słabą nazywamy również zbieżnością według iloczynu skalarnego.

Definicja 1.28 (Zbieżność silna) *Mówimy że ciąg $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest silnie zbieżny do operatora T jeżeli*

$$\bigwedge_{\varphi \in \mathcal{H}} \lim_{n\to\infty} ||T_n\varphi - T\varphi|| = 0$$

Zbieżnosc ta ozbnaczamy pisząc $\mathrm{s-}\lim_{n\to\infty} T_n = T$

Definicja 1.29 (Zbieżność jednostajna) *Mówimy że ciąg* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest jednostajnie zbieżny do* $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n - T|| = 0$$

Fak ten oznaczamy zapisując $\mathrm{u-}\lim_{n\to\infty} T_n = T$

Zatem zbieżność jednostajna oznacza zbieżność w normie opratorowej. Ze zbieżności jednostajnej wynika zbieżność silna a z niej słaba.

1.5 Przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem

Niech $(X, \mathfrak{m}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Rozważmy zbiór wszystkich funkcji zespolonych mierzalnych na $(X, \mathfrak{m})$ takich że $\int_X |f|^2 \mathrm{d}\mu$. Wprowadzenie dodowania funkcji i monożenia funkcji przez liczbe zespolona zadaje na tym zbiorze strukturę przestrzeni liniowej. Nierówność

$$|f(x)^* g(x)| \leqslant \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2) \tag{1.1}$$

gwarantuje że całka

$$\int_X |f(x)^* g(x)| \mathrm{d}x \tag{1.2}$$

jest skończona. Jenakże przyjęcie 1.2 jako definicji iloczynu skalarnego na zbiorze funkcji całkowalnych z kwadratem nie zapewni iż $\langle f|f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Musimy zatem dokonać utożsamienia funkcji różniących się na podzbiorze zbioru miary zero. W zbiorze funcji całkowalnych z kwadratem wprowadzamy relację

$$f \sim g \Leftrightarrow \int_X |f(x) - g(x)|^2 \mathrm{d}\mu = 0 \tag{1.3}$$

Relacja ta jest relacją równowaności. Przestrzeń $L^2(X, \mu)$ jest zupełna względem metryki indukowanej przez normę:

$$\bigwedge_{f,g\in L^2} d(f,g) := ||f - g||$$

W przestrzeni $L^2(X\mathfrak{m}, \mu)$ $d(f, g) = 0$ ozanacza że $f = g$ prawie wszędzie względem miary μ.

1.6 Twierdzenie spektralne

1.6.1 Miary spektralne

W podrozdziale 1.1 zdefiniowaliśmy miarę rzeczywistą. Tutaj podamy pewne uogólnienie tego pojęcia potrzebne do podania ogólnej postaci twierdzenie spektralnego.

Definicja 1.30 *Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem skończonym. Miarą operatorową (ang. POVM - possitive operator value measure) na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{B}(X))$ nazywamy odwzorowanie $E : \mathcal{B}(X) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ spełniające warunki*

1. $E(\emptyset) = 0$, $E(X) = \mathbb{I}$
2. $\bigwedge_{A,B \in \mathcal{B}(X)} E(A)E(B) = E(A \cap B)$
3. $[A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \wedge ((i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset))] \Rightarrow E(A) = \sum_{i=1}^{\infty} E(A_i)$ *przy czym zbieżność szeregu jest słaba.*

Jeżeli zakresem miary operatorowej są operatory rzutowe to nazywamy ją miarą projektorową (ang. *PV-measure*). Miarę operatrowa na $\mathbb{R}$ nazywamy miara półspektralną, a miarę projektorową na $\mathbb{R}$ nazywamy miarą spektralną.

Dla każdej miary spektralnej $E : \mathfrak{R} \to \mathcal{H}$ i dla każdego $f \in \mathcal{H}$ takiego, że $||f|| = 1$ $\mu_{E,T} = \langle f|E(\cdot)f\rangle$ jest miarą probabilistyczną na $(S, \mathfrak{R})$. Dlatego miary probabilistyczne reprezentują obserwable (wielkości fizyczne).

1.6.2 Rozkład spektralny

Niech $u : X \to \mathbb{C}$ będzie funkcją całkowalną z kwadratem normy według miary $\mu_{E,T}$ dla dowolnej miary spektralnej E i pewnych $f \in \mathcal{H}$. Z lematu Riesza wynika istnienie operatora $\hat{u}$ na $\mathcal{H}$ takiego że $\langle f|\hat{u}f\rangle = \int_X u \mathrm{d}\mu_{E,T}$ dla $f \in D_{\hat{u}} := \{f \in \mathcal{H} | \int_X |u|^2 \mathrm{d}\mu_{E,T} < \infty\}$. Operator ten oznaczamy $\hat{u} = \int_X u \mathrm{d}E(\lambda)$.

Twierdzenie 1.6 (Twierdzenie spektralne) *Każdemy operatorowi samosprzężonemu A odpowiada dokładnie jedna miara spektralna $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to Ex[0,1]$ tak, że*

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda E(\lambda)$$

przy czym zapis $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda E(\lambda)$ rozumiemy jako $\langle \varphi | A\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda E(\lambda)$

Przykład 1.7

1. *Niech χ_Δ będzie funkcją charakterystyczna zbioru Borelowskiego $\Delta \subset \mathbb{R}$. Wówczas*

$$\chi_\Delta(A) = \int_{\mathbb{R}} \chi_\Delta(\lambda) \mathrm{d}E(\lambda) = E(\Delta)$$

2. *Najprostszy przykład miary spektralnej otrzymujemy biorąc*

$$E(\Delta) = \mu(\Delta)\mathbb{I}$$

dla dowolnej ustalonej miary probabilistycznaj μ.

3. *W przestrzeni $L^2(X, \mathfrak{R}, \mu)$ określamy $E(\Delta)$ przez*

$$(E(\Delta)f)(x) = \chi_\Delta f(x)$$

Odwzorowanie $E : \Delta \to E(\Delta)$ jest miarą projektorową. W szególności gdy $(X, \mathfrak{R}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ otrzymujemy miarę spektralną odpowiadającą operatorowi położenia.

1.6.3 Własnośći operatorów samosprzężonych w języku miar spektralnych

Własnośći operatorów samosprzężonych dają się elegancko wyrazić poprzez własność odpowiadających im miar spektralnych.

Widmo operatora samosprzężonego to najmniejszy zbiór domknięty w $\mathbb{R}$ taki że odpowiednia miara spektralana przyjmuje na nim wartość $\mathbb{I}$.

Operator jest ograniczony wtedy, i tylko wtedy gdy gdy jego widmo zawarte jest wewnątrz skończonego przedziału na $\mathbb{R}$. Spektrum efektu jest zawarte w $[0,1]$, a spektrum operatora rzutowego to zbiór $\{0,1\}$.

Każdej wartości własnej odpowiada operator rzutowy, a wszystkie wektory z podprzestrzeni domkniętej odpowiadającej temu operatorowi to wektory własne A. Oznacza to iż jeśli λ jest wartością własną operatora A i $E(\{\lambda\}) = P_\lambda$ jest operatorem rzutowym, to $A\psi = \lambda\psi$ dla każdego ψ takiego, że $P_\lambda\psi = \psi$.

1.7 Twierdzenia Stonea

Niech A będzie operatorem samosprzężonym z miarą spektralną E. Dla dowolnej liczby rzeczywistej t definujemy

$$U_t := \int_{\mathbb{R}} \exp i\lambda t \mathrm{d}E(\lambda) \tag{1.4}$$

Naturalne jest tu oznaczenie

$$U_t = e^{i\lambda t}$$

W ten sposób definujemy funkcję wykładniczą dla – niekoniecznie ograniczonego – operatora A. Dla operatora oganiczonego A można to zrobić przy pomocy szeregu

$$e^{i\lambda t} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} A^n \tag{1.5}$$

który jest zbieżny w normie operatorowej.

Otrzymana rodzina $\{U_t | t \in \mathbb{R}\}$ operatorów ma następujące własności

- Dla ustalonego $t \in \mathbb{R}$ opeator U_t jest operatorem unitarnym, co oznacza iż jest on liniowym, ograniczonym operatorem na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ zachowującym normę dowolnego wektora z $\mathcal{H}$.

  Z definicji wynika iż przy ustalonym t

  $$\bigwedge_{f,g\in\mathcal{H}} \langle U_t f | U_t g\rangle = \langle f|g\rangle \tag{1.6}$$

  Pociąga to za sobą równość $UU^* = U^*U = \mathbb{I}$ którą można przyjąc za definicję operaora unitarnego.

- $\bigwedge_{t_1} \bigwedge_{t_2} U_{t_1} U_{t_2} = U_{t_1+t_2}$
- Jeżeli $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem elementów przestrzeni Hilberta takim że $\lim_{n\to\infty} =$ t_0 to
$$\text{s}-\lim_{n\to\infty} U_{t_n} f = U_{t_0} f$$
- Dla $f \in D_A$ definujemy pochodną
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_t f := \text{s}-\lim_{t\to\infty} \frac{U_t f - f}{t}$$
i otrzymujemy
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_t f = iAf$$
- Jeżeli s$-\lim_{t\to\infty} \frac{U_t f - f}{t}$ istneje, to $f \in D_A$

Jeżeli parametr t utożsamimy z czasem, to rodzina $\{U_t | t \in \mathbb{R}\}$ o powyższych własnościach jest grupą dynamiczną układu fizycznego, podczas gdy operator A jest generatorem tej grupy.

Rodzina $\{U_t | t \in \mathbb{R}\}$ jest silnie ciągłą, jednoparametrową grupą unitarną.

Twierdzenie 1.7 (Stonea) *Każda silnie ciągła jednoparametrowa grupa unitarna jest pstaci $\{e^{iAt} | t \in \mathbb{R}\}$ dla pewnego operatora samosprzężonego A.*

Inaczej mówiąc, każda taka grupa wyznacza jedyną miarę spektralną E na $\mathbb{R}$ taką że
$$U_t = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} \mathrm{d}E(\lambda)$$
Operator A, którego istnienie zapewnia twierdzenie Stonea, nazywamy generatorem infinitezymalnym grupy $\{U_t | t \in \mathbb{R}\}$.

1.8 Iloczyn tensorowy przestrzeni Hilberta

Mając dwa układy kwantowe możemy skonstruować układa złożony którego będą one podukładami. Do opisu otrzymanego układu wykorzystuajemy iloczyn tenstorowy przestrzeni układów wyjściowych.

Definicja 1.31 *Przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ nazywamy iloczynme tensorowym przestrzeni $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ jeżeli istnieje odwzorowania dwuliniowe $\Phi : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}$ takie że*

1. $\{\Phi(f_1, f_2) | f_1 \in \mathcal{H}_1, f_2 \in \mathcal{H}_2, \}$ *napina* $\mathcal{H}$
2. $\langle \Phi(f_1, f_2) | \Phi(g_1, g_2) \rangle = \langle f_1 | g_1 \rangle \langle f_2 | g_1 \rangle$

Oznaczamy wówczas $\mathcal{H}$ poprzez $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Wektory posatci $\Phi(f, g)$ nazywamy tensorami prostymi i oznaczmy $f \otimes g$

Należy zauważyc iż $\Phi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subsetneq \mathcal{H}$ czyli istnieją w $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ wektory nie dające się przedstawić jako $\Phi(f, g)$ dla pewnych $f \in \mathcal{H}_1$ oraz $g \in \mathcal{H}_2$.

Twierdzenie 1.8 (O jednoznaczności iloczynu tensorowego) *Niech $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ będą przestrzeniami Hilberta oraz niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą różnymi iloczynami tensorowymi $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ z odwzorowaniami Φ i Ψ odpowiednio. Wówczas istnieje jednoznacznie określony operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ taki że*

$$\bigwedge_{f \in \mathcal{H}} \bigwedge_{g \in \mathcal{K}} U(\Phi(f, g)) = \Psi(f, g) \tag{1.7}$$

1.8.1 Konstrukcja Iloczynu tensorowego

Oznaczmy przez $f_1 \otimes f_1$ funkcję na $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ zdefiniowaną wzorem

$$f_1 \otimes f_1(g_1, g_2) := \langle f_1 | g_1 \rangle \langle f_2 | g_2 \rangle \tag{1.8}$$

dla $f_1, g_1 \in \mathcal{H}_1$ oraz $f_2, g_2 \in \mathcal{H}_2$. Przez $\mathcal{H}_0$ oznaczmy przestrzeń wszystkich skończonych kombinacji liniowych funkcji $f_1 \otimes f_2$

1.9 Suma prosta przestrzeni Hilberta

Niech $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ będą przestrzeniami Hilberta.

Definicja 1.32 *Zbiór $\{(f_1, f_2) | f_1 \in \mathcal{H}_1, f_2 \in \mathcal{H}_2\}$ z działaniami dodawania*

$$(f_1, f_2) + (g_1, g_2) = (f_1 + g_1, f_2 + g_2)$$

oraz mnożenia przez liczbę zespoloną

$$\lambda(f_1, f_2) = (\lambda f_1, \lambda f_2)$$

oraz z iloczynem skalarnym

$$\langle (f_1, f_2) | (g_1, g_2) \rangle = \langle f_1 | g_1 \rangle + \langle f_2 | g_2 \rangle$$

nazywamy sumą prostą pzrzestrzenia Hilberta i oznaczmy przez $\mathcal{H}_\infty \oplus \mathcal{H}_\in$.

Przykład 1.8

1. *$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$ i ogólnie $\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{m+n}$ dla m i n skończonych.*
2. *Niech M będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzenia Hilberta $\mathcal{H}$. Wówczas $M^\perp = \{f \in \mathcal{H} | \bigwedge_{g \in \mathcal{H}} f \perp g\}$ także jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{H}$ i $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$.*
3. *Uogólniając poprzedzni przykład możemy stwierdzić iż w $\mathcal{H}_\infty \oplus \mathcal{H}_\in$ podprzestrzeń $\{(f, 0) | f \in \mathcal{H}_\infty\}$ jest izmomorficzna z przestrzenią $\mathcal{H}_\infty$ a podprzestrzeń $\{(0, g) | g \in \mathcal{H}_\in\}$ jest izmomorficzna z przestrzenią $\mathcal{H}_\in$.*

4. *Niech μ_1 i μ_2 będą wzajemnie osobliwymi miarami bolerowskimi na $\mathbb{R}$ i niech $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Wóczas $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ jest izmorficzna z $L^2(\mathbb{R}, \mu_1) \oplus L^2(\mathbb{R}, \mu_2)$*

Pojęcei sumy prostej można uogólnić na przeliczalną ilość składników. Niech $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem przestrzeni Hilberta. Rozważmy zbiór ciągów

$$\{\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} | f_n \in \mathcal{H}_n\}$$

takich że

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||^2 < \infty$$

Zbiór ten jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} | \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n | g_n\rangle$$

Oznaczamy go przez $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$.

Przykład 1.9 1. *$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C} = \ell^2 = \{\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} | \lambda_n \in \mathbb{C} \wedge \sum n \in \mathbb{N} |\lambda_n|^2\} < \infty$. Otrzymujemy w ten sposób przestrzen ciągów zespolonych sumowalnych z kwadratem modułu.*

2. *Niech A będzei operatorem samosprzężonym o widmie dyskretnym $\{\lambda_n | n \in \mathbb{N}\}$ a P_n operatorem rzutowym odpowiadającym punktowi λ_n widma w rozkładzie spektralnym operatora A*

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

Oznaczmy przez M_n podprzestrzeń na którą rzutuje operator P_n. Wówczas

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n \tag{1.9}$$

Rozdział 2

Sformułowanie teorii

2.1 Reguły komutacji

Bezpośredni rachunek prowadzi do równości

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\mathbb{I} \tag{2.1}$$

Ponieważ $\hat{Q}$ i $\hat{P}$ są nieograniczone, musimy ograniczyć zbiór elementów przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ na której będziemy rozpatrywali tą równość. Okazuje się że można znaleźć zbiór D spełniający następujące warunki

1. D jest gęstym podzbiorem $\mathcal{H}$
2. $D \subset D(Q) \cap D(P)$
3. $\bigwedge_{x \in D} [\hat{Q}, \hat{P}]x = ix$

Zbiór D można określić na wiele sposobów.

Przykład 2.1 *Weźmy zbiór funkcji* $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, *gdzie funkcje* $H_n(x)$ *to wielomiany Hermite'a. Funkncje te tworzą bazę w* $L^2(\mathbb{R})$, *a ich skończone kombinacje liniowe tworzą gęstą podprzestrzeń spełniającą powyższe warunki.*

Przykład 2.2 *Jako* D *weźmy zbiór* $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ *funkcji zespolonych na* $\mathbb{R}$ *takich, że* $\lim_{x \to \infty} x^n \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} f(x) = 0$ *dla wszystkich* $n, m \in \mathbb{N}$.

2.2 Obserwable elementarne

Szczególne znaczenie fizyczne ma podzbiór

$$\{T \in \mathcal{L}_S(\mathcal{H}) | 0 \leqslant T \leqslant \mathbb{I}\} =: [0, \mathbb{I}] \tag{2.2}$$

Jego elementy nazywamy obserwablami elementarnymi.

Zbiór ten jest zbiorem wypukłym. Elementy ekstremalne tego zbioru to efekty ostre.

2.3 Stany

Miary operatorowe reprezentujż obserwable, a złożenie miary operatorowej i funkcji falowej daje miarę na zbiorze wartości obserwabli.

Stany powinny określać miare probabilistyczną dla każdej obserwabli, a więc stan powinien być odwzorowaniem $\rho : [0, \mathbb{I}] \to [0, 1]$ takim żeby $\rho \circ E$ była miarą probabilistyczną dla każdej obserwabli E.

Jeżeli $T \in S$ oraz $E : \mathcal{R} \to \mathcal{E}(\mathcal{H})$ jest obserwablą, to odwzorowanie $\mu_{E,T} : \mathcal{R} \to [0, 1]$ zdefiniowane wzorem $\mu_{E,T}(x) = \mathrm{Tr}(TE(x))$ jest miarą probabilistyczną na $\mathcal{R}$. Wartość średnia

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{d}\mu_{E,T} &= \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{Tr}(T\mathrm{d}E(\lambda)) \\ &= \mathrm{Tr}(T \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{d}E(\lambda)) = \mathrm{Tr}(TA) \end{aligned} \tag{2.3}$$

gdzie A jest operatorem samosprzężonym odpowiadającym mierze E.

Z definicji obserwabli (miary operatorowej) wynika, że:

(i) $\rho(0) = 0, \ \rho(\mathbb{I}) = 1$

(i) $\sum a_i \in \mathcal{E}(\mathcal{H}), \quad a_i \in \mathcal{E}(\mathcal{H}), \ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum \rho(a_i) = \rho(\sum a_i)$

Przy czym zbieżność szeregu $\sum a_i$ rozumiana jest zbieżnośćią słabą w $\mathcal{H}$

Stan ρ_f określony poprzez

$$\rho_f(a); \langle f | af \rangle$$

dla $a \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ i $f \in \mathcal{H}, ||f|| = 1$, spełnia powyższe warunki. Jednak dla dówch dowolnych wektorów $f, g \in \mathcal{H}$ stan $\lambda\rho_f + (1 - \lambda)\rho_g$ nie spełania na ogół tych warunków. Musimy założyć, iż $f \perp g$.

A więc odwzorowania ρ stanowią zbiór szerszy od zbiou znormalizowanych wektorów w $\mathcal{H}$.

2.3.1 Operatory gęstości

Niech $S := \{T \in \mathcal{T}_S(\mathcal{H}) | T \geqslant 0 \wedge \mathrm{Tr}(T) = 1\}$. Weźmy ciąg $a_1, a_2, \ldots \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ taki że $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \in \mathcal{E}\mathcal{H}$. Warunek ten oznacza iż istnieje pewne $a \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ takie, że dlakażdego $\psi \in \mathcal{H}, ||\psi|| = 1$ taki że

$$\lim_{n \to \infty} \langle \psi | \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \psi \rangle = \langle \psi | a\psi \rangle$$

Mamy

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(T\sum_{i=1}^{n} a_i) &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle \psi_m | T \sum_{i=1}^{n} a_n \psi_m \rangle = \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle T\psi_m | \sum_{i=1}^{n} a_i \psi_m \rangle = \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \phi_k | T\psi_m \rangle^* \langle \phi_k | \sum_{i=1}^{n} a_i psi_m \rangle \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}(T\sum_{i=1}^{n} a_i) &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \phi_k | T\psi_m \rangle^* \langle \phi_k | a\psi_m \rangle \\
&= \mathrm{Tr}(Ta) \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Tak więc każdy operator należący do S określa odwzorowanie $\hat{\rho} : \mathcal{EH} \to [0,1]$ o rządanych własnościach i każdy operator ze zbioru S moze opisywać satn układu kwantowego. W 1957 r. zostało udowodnione następujące twierdzenie

Twierdzenie 2.1 (Gleasona) *Dla każdego funkcjonału liniowego p takiego że*

1.

$$p(0) = 0,\ p(\mathbb{I}) = 1 \qquad (2.6)$$

2.

$$E_1 E_2 = 0 \Rightarrow p(E_1 E_2) = p(E_1) + p(E_2) \qquad (2.7)$$

istnieje operator ρ hermitowski, dodatnio określony, o śladzie $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$ *który spełnia warunek*

$$p(E) = \mathrm{Tr}(\rho E) \qquad (2.8)$$

Elementy zbioru S nazywamy operatorami gęstości (macierzami gęstości) lub stanami.

Zbiór S jest wypukły, co oznacza iż

$$\bigwedge_{\lambda\in[0,1]} (T_1 \in S \wedge T_2 \in \S) \Rightarrow \lambda T_1 + (1-\lambda) T_2 \in S \qquad (2.9)$$

a nawet σ-wypukły

$$\bigwedge_{\{T_n\in S\}_{n\in\mathbb{N}}} \bigwedge_{\{\lambda_n\in S\}_{n\in\mathbb{N}}} (\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = 1) \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n T_n \in S \qquad (2.10)$$

przy czym zbieżność szeregu należy rozumieć w sensie normy śladowej.

2.3.2 Rozkład spektralny operatorów gęstości

2.4 Zgodność obserwabli

Definicja 2.1 *Dwa efekty nazywamy zgodnymi gdy naleza do zakresu ... miary operatorowej.*

Definicja 2.2 *Dwa projektory nazywamy zgodnymi gdy należą do zakresu ... miary projektorowej.*

Twierdzenie 2.2 *Dwa projektory są zgodne wtedy, i tylko wtedy gdy są przemienne.*

Definicja 2.3 *Dwie miary operatorowe nazywamy gdy istnieje trzecia miara operatorowa zawierająca w swoim zakresie sumę mnogościową zakresów obu miar.*

Twierdzenie 2.3 *Dwa operatory ograniczone są zgodne wtedy, i tylko wtedy gdy są przemienne.*

2.5 Równoczesna mierzalność

2.6 Symetrie

Definicja 2.4 *Automorfizmem zbioru stanów $S \subset \mathcal{T}_S(\mathcal{H})$ nazywamy afiniczną bijekcję S, czyli odwzorowanie $m : S \to S$ o własnościach:*

(i) $m(\lambda T_1 + (1-\lambda)T_2) = \lambda m(T_1) + (1-\lambda)m(T_2))$

(ii) m jest $1-1$ i na (tj. jest różnaowartościową injekcją)

Dowolny automorfizm na zbiorze S można rozszerzyć przez liniowość na zbiór $\mathrm{lin}(S)$ skończonych rzeczywistych kombinacji liniowych elementów z S[1].Odwzorowanie m rozpatrywane jako odwzorowanie liniowe $\mathcal{T}_S(\mathcal{H})$ na siebie jest

(a) liniowe

(b) dodatnie

(c) jego odwrotność jest dodatnia

(d) zachowuje ślad

Takie odwzorowania **Danies** nazywa symetriami przestrzeni operatorów śladowych.

Zbiór wszystkich symetrii tworzy grupę. Każda symetria $m : \mathcal{T}_S(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}_S(\mathcal{H})$ definuje odwzorowanie dualne $m^* : \mathcal{L}_S(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}_S(\mathcal{H})$. Odwzorowanie m^* jest również dodatnie i ciągłe.

[1] Twierdzenie o ograniczonym odwzorowaniu liniowym pozwala jednoznacznie rozciągnąć m z $lin(S)$ na $\mathcal{T}_S(\mathcal{H})$ ponieważ $lin(S)$ jest gęstym podzbiorem $\mathcal{T}_S(\mathcal{H})$

2.6.1 Twierdzenie Wignera

Twierdzenie 2.4 (Wignera) *kazdy automorfizm zbioru stanów kwantowych ma postać*

$$T \to UTU^*$$

gdzie $T \in S$, *a* U *jest operatorem unitarnym albo antyunitarnym na* $\mathcal{H}$

Z tego powodu operatory unitarne reprezentują symetrie układu kwantowego. poniższe twierdzenia jest wnioskiem z twierdzenia Wignera

Twierdzenie 2.5 *Jeżeli* $\rho : \mathcal{L}_S(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}_S(\mathcal{H})$ *jest dodatnim odwzorowaniem liniowym, posiadającym dodatnią odwrotność oraz takim że* $\rho(\mathbb{I}) = 1$, *to istnieje odwzorowanie unitarne lub antyunitarne* U *na* $\mathcal{H}$ *takie że*

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{L}_S(\mathcal{H})} \rho A = U^* A U$$

2.7 Niezmienniczość Galileusza

Do rozważań włanczamy oprócz translacji również ruch jednostajny układu odniesienia, czyli uwzględniamy ogólną postać tarnsformacji galileusza

$$x' = x - \lambda - vt, \quad t' = t$$

Każda taka transformacjia opisana jest przez dwa parametry rzeczywiste λ oraz v z prawem składania $(\lambda_1, v_1)(\lambda_2, v_2) = (\lambda_1 + \lambda_2, v_1 + v_2)$. ....

Rozdział 3

Kwantowe układy złożone

3.1 Dynamika podukładów

Rozwój w czasie układu kwantowego opisany jest przez silnie ciągła, jednoparametrową grupę operatorów unitarnych na prestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ (grupę dynamiczną), lub – równoważnie – prze jednoparametrową grupę automorfizmów $\{\mathcal{U}_t | \mathcal{U}_t : \mathcal{T}_S(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}_S(\mathcal{H})\}$ bijekcji liniowych, dodatnich i zachowujących ślad. Automorfizmy należące należące do grupy $\{\mathcal{U}_t | t \in \mathbb{R}\}$ nazywamy superoperatorami.

3.2 Paradoks EPR

"If, without in any waydisturbing a system, we can predict with certainty (i.e. with probability equat to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this quantity."

Dla układu dwóch elektronów przestrzenią stanów spinowych jest $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Operator trzeciej składowej spinu ma reprezentacje

$$s_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

w bazie swoich stanów własnych $\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Dlatego naturalnym wyborem bazy w $\mathbb{C}^4$ jest baza iloczynowa: $\phi_+ \otimes \psi_+, \phi_+ \otimes \psi_-, \phi_- \otimes \psi_+, \phi_- \otimes \psi_-$ gdzie $\psi_\pm$ to wektory własne trzeciej składowej spinu drugiego elektronu. Jednakże wygodniejsza w zastosowaniach jest baza

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \phi_+ \otimes \psi_+ \\ \Phi_2 &= \phi_- \otimes \psi_- \\ \Phi_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_+ \otimes \psi_- + \phi_- \otimes \psi_+) \end{aligned}$$

$$\Phi_3 \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_+ \otimes \psi_- - \phi_- \otimes \psi_+)$$

Jej dogodność wynika z faktu, iż jest to baza wspólnych wektorów własnych dwóch operatorów: trzeciej składowej spinu dwu elektronów oraz kwadratu spinu dwu elektronów.

3.3 Splątanie

3.4 Generalized master equation

3.5 Przestrzeń Foka

Niech $\mathcal{H}^n$ oznacza $n-$krotny iloczyn tensorowy $\mathcal{H} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}$ przy czym $\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}$.

Definicja 3.1 *Przestrzenią Foka nazywamy* $\mathcal{F}(H) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^n$

Przestrzeń $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ jest przestrzenią Hilberta z wyróżnionymi podprzestrzeniami własnymi operatora liczby cząstek, lub inaczej mówiąc przestrzenią Hilberta zokreślonym operatorem liczby cząstek określonym jak w poprzednim przykładzie.

Mając daną przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ konstrujemy $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ w nasępujący sposób. Rozważmy zbiór $\mathcal{F}^0(\mathcal{H})$ wszystkich ciągów

$$\Phi = \{\Phi^0, \Phi^1, \Phi^2, \ldots, \Phi^n, \ldots\}$$

ze skończona ilością wyrazów niezerowych, takich żę $\Phi^n \in \mathcal{H}^n$. Wyraz Φ^n nazywamy n-cząstkową składową ciągu Φ. Zbiór $\mathcal{F}^0(\mathcal{H})$ zdziałaniami dodawania i mnożenia przez skalar wykonywanymi po składowych oraz z iloczynem skalarnym

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \Phi^n | \Psi^n \rangle$$

jst przestrzenią prehilbertowską. Przestrzeń Hilberta $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ otrzymujemy jako uzupełnienie przestrzeni metrycznej $\mathcal{F}^0(\mathcal{H})$ z metryką określoną przez normę.

Twierdzenie 3.1 *Przestrzeń Foka $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ jest ośrodkowa wtedy, i tylko wtedy gdy przestrzeń $\mathcal{H}$ jest ośrodkowa.*

Przykład 3.1 *Niech $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Wówczas $\mathcal{H}^n \simeq L^(\mathbb{R}^n)$ a $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ jest ciągiem funkcji*

$$\phi = \{\phi_0, \phi_1(x_1), \phi_2(x_1, x_2), \phi_1(x_1, x_2, x_3), \ldots\}$$

takich że

$$|\phi_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_n(x_1, \ldots, x_n)| \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n < \infty$$

Poszczególne człony powyższej sumy to prawdopodobieństw znalezienia n cząstek w układzie w stanie ϕ.

3.5.1 Przestrzeń fermionowa i bozonowa

Z reguły w kwantowej teorii pola wykorzystuje się dwie szczególne przestrzenie Foka $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ oraz $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$.

Niech S_n będzie grupą permutacji, (tj. wzajemnie jednoznacznych odwzorowań zbioru $\{0, 1, \dots, n\}$ w siebie). W $\mathcal{H}^n$ tworzymy bazę z elementów

$$\varphi_{k_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{k_n}, \quad \varphi_{k_i} \in \{\varphi_k\}$$

Dla $\pi \in S_n$ określamy operator

$$U(\pi)(\varphi_{k_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{k_n}) := \varphi_{k_{\pi(1)}} \otimes \ldots \otimes \varphi_{k_{\pi(n)}}$$

Operator ten rozszerzamy przez liniowość do operatora ograniczonego na $\mathcal{H}^n$ i otrzymujemy w ten sposób reprezentację unitarną grupy S_n na przestrzeni $\mathcal{H}^n$

Określamy dwa operatory

$$S_n := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} U(\pi) \tag{3.1}$$

$$A_n := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) U(\pi) \tag{3.2}$$

$$\tag{3.3}$$

gdzie $\varepsilon : S_n \to \{-1, 1\}$ zwraca parzystość permutacji

$$\varepsilon(\pi) = \begin{cases} +1 & \text{permutacja } \pi \text{ jest parzysta} \\ -1 & \text{permutacja } \pi \text{ jest nieparzysta} \end{cases}$$

Operatory S_n i A_n są operatorami rzutowymi na $\mathcal{H}^n$ czyli są samosprzężone i idempotentne oraz

$$S_n A_n = A_n S_n = 0$$

W związku z tym $S_n \mathcal{H}^n$ oraz $A_n \mathcal{H}^n$ są domkniętymi, wzajemnie ortogonalnymi podprzestrzeniami w $\mathcal{H}$. Jednakże nie wypełniają one całej przestrzeni $\mathcal{H}^n$. $S_n \mathcal{H}^n$ nazywamy n-krotnym symetrycznym iloczynem tensorowym przestrzeni $\mathcal{H}$, a $A_n \mathcal{H}^n$ – n-krotnym antysymetrycznym iloczynem tensorowym przestrzeni $\mathcal{H}$. Definiujemy

$$\mathcal{F}_s \mathcal{H} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n \mathcal{H}^n \quad \mathcal{F}_a \mathcal{H} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n \mathcal{H}^n \tag{3.4}$$

$\mathcal{F}_s \mathcal{H} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n \mathcal{H}^n$ to symetryczna (bozonowa) przestrzeń Foka, $\mathcal{F}_a \mathcal{H} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n \mathcal{H}^n$ to antysymetryczna (fermionowa) przestrzeń Foka.

Zasada symetryzacji Pauliego Fizyczny sens mają tylko podprzestrzenie $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ i $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$. Pozostałe są odrzucane.

Przykład 3.2 *Niech $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}), \mathcal{H}^n = L^2(\mathbb{R}^n)$. $S_n \mathcal{H}$ jest wówczas podprzestrzenią w $L^2(\mathbb{R}^n)$ złożoną ze wszystkich funkcji niezmienniczych względem permutacji swoich argumentów (funkcji symetrycznych), natomiast $A_n \mathcal{H}$ jest podprzestrzenią funkcji antysymetrycznych.*

3.5.2 Operatory konstrukcji

niech $\Phi \in S_n \mathcal{H}^n$ będzie postaci

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} \phi_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes \phi_{\pi(n)} \tag{3.5}$$

dla pewnych wektorów $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \in \mathcal{H}$. Dla $\psi \in \mathcal{H}$ definujemy operatory

$$\begin{aligned} a(\psi)\Phi &:= \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \sum_{\pi \in S_{n-1}} \langle \psi | \phi_{\pi(1)} \rangle \phi_{\pi(2)} \otimes \ldots \otimes \phi_{\pi(n)} && (3.6) \\ a^*(\psi)\Phi &:= \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \sum_{\pi \in S_{n+1}} \phi_{\pi(0)} \otimes \phi_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes \phi_{\pi(n)} && (3.7) \\ & && (3.8) \end{aligned}$$

gdzie $\phi_0 = \psi$. Jak widać $a(\psi)\phi \in S_{n-1}\mathcal{H}^{n-1}, a^*(\psi)\phi \in S_{n+1}\mathcal{H}^{n+1}$.

Ponieważ wektory postaci 3.5 rozpinają całą przestrzeń $S_n\mathcal{H}^n$ możemy rozszeżyć przez liniowość operatory 3.6 i 3.7 na zbiór gęsty w $S_n\mathcal{H}^n$, a ponieważ są ograniczone możemy jes rozszeżyc na przez ciąłość do odwzorowań z $S_n\mathcal{H}^n$ w $S_{n-1}\mathcal{H}^{n-1}$ i $S_{n+1}\mathcal{H}^{n+1}$ odpowiednio. Następnie przez liniowość możemy je rozszeżyć do operatorów z $\mathcal{F}_s^0(\mathcal{H})$ w $\mathcal{F}_s^0(\mathcal{H})$. Ponieważ w ówczas stają się one nieograniczone nie można ich rozszeżyć na całą przestrzeń Foka $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$.

Podobnie jeżeli

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} \psi_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes \psi_{\pi(n)} \tag{3.9}$$

to określamy dla $\phi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} a(\phi)\Psi &:= \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \sum_{\pi \in S_{n-1}} \varepsilon(\pi) \langle \phi | \psi_{\pi(1)} \rangle \psi_{\pi(2)} \otimes \ldots \otimes \psi_{\pi(n)} && (3.10) \\ a^*(\phi)\Psi &:= \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \sum_{\pi \in S_{n+1}} \psi_{\pi(0)} \otimes \psi_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes \psi_{\pi(n)} && (3.11) \\ & && (3.12) \end{aligned}$$

dla $\psi_0 = \phi$. Powtarzając powyższą procedurę otrzymujemy, tym razem ograniczone, operatory z $\mathcal{F}_a^0(\mathcal{H})$ w $\mathcal{F}_a^0(\mathcal{H})$. Można je rozszeżyć przez ciągłosc na $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$.

W obu wypadkach operatory a i a^* mają interpretację jako operatory anihilacji i kreacji. Spełniaja one kanoniczne relacje przemiennośći

1. Relacje komutacji dla symetrycznej przestrzeni Foka

$$\begin{aligned} [a(\phi), a(\psi)] &= 0 \\ [a^*(\phi), a^*(\psi)] &= 0 \\ [a^*(\phi), a(\psi)] &= \langle \phi | \psi \rangle \end{aligned} \tag{3.13}$$

na całej $\mathcal{F}_s^0(\mathcal{H})$

2. Relacje antykomutacyjne dla antysymetrycznej przestrzeni Foka

$$\begin{aligned} \{a(\phi), a(\psi)\} &= 0 \\ \{a^*(\phi), a^*(\psi)\} &= 0 \\ \{a^*(\phi), a(\psi)\} &= \langle \phi | \psi \rangle \end{aligned} \tag{3.14}$$

na całej $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$

3.5.3 Operatory liczby obsadzeń

Operator a^*a jest samosprzężony na $\mathcal{F}_s^0(\mathcal{H})$. Oznaczamy

$$n(\psi) = a^*(\psi)a(\psi)$$

Łatwo wyliczyć, że $\langle \Phi | n(\Phi)\psi \rangle$ dla stanu Φ określonego równaniem 3.5 równa się liczbie wystąpień wektora ψ w zbiorze $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$, czyli liczbie obsadzeń stany jednocząstkowego ψ w stanie n-cząstkowym Φ. Podobie sytuacja ma się dal wypadku przestrzeni antysymetrycznej. Jednak wówczas – ze względu na antysymetrię – dopuszczalne są jedynie liczby obsadzeń 0 lub 1.

Biorąc dowolną bazę $\{\psi_n | n \in \mathbb{N}\}$ w $\mathcal{H}$ określamy operator liczby cząstek

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} a^*(\psi_n)a(\psi_n) \tag{3.15}$$

Dla znormalizowanego wektora Φ_0 z $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}$

$$N\Phi_0 = 0$$

Stan Φ_0 jest nazywany stanem próżni. Jest to jedyny stan spełnaijący warunek

$$a(\phi)\Phi_0$$

dla każdego $\phi \in \mathcal{H}$. Jest to warunek stabliności próżni.

Wektory otrzymane z Φ_0 poprzez działanie ____________________________ tworzą podzbiór gęsty w $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}$. Podobnie dla $\mathcal{F}_a(\mathcal{H}$

3.6 Drugie kwantowanie

Pojawia się problem rozszerzenia operatorów działających w $\mathcal{H}$ i reprezentujących obserwable, na całą przestrzeń Foka $F(\mathcal{H})$.

Niech A będzie gęsto określonym operatorem samosprzężonym na $\mathcal{H}$. Definujemy $A^{(n)} := A \otimes \mathbb{I} \otimes \ldots \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes A \otimes \ldots \otimes \mathbb{I} + \ldots + \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \ldots \mathbb{I}$

Rozdział 4

Kwantowa teoria informacji

Rozdział ten nie był ogrinalnie częścią wykładu „Mechanika kwantowa II".

4.1 Komputery kwantowe

4.1.1 Qubity

Podstawową jednostką na jakiej przeprowadzane są operacje kwantowe jest czyli bit kwantowy. Poniższa definicja pochodzi od Shumachera

Definicja 4.1 *Qubitem nazywamy układ kwantowy, którego przestrzń Hilberta jest dwuwymiarowa.*

Jeżeli wektory bazowe tej przestrzeni oznaczymy przez $|0\rangle$ i $|1\rangle$ to najogólniejsza postać wektora stanu qubitu jest następująca

$$a|0\rangle + b|1\rangle \qquad a, b \in \mathbb{C} \tag{4.1}$$

Wektora bazowe numerowane liczbami binarnymi tworzą bazę zwaną bazą obliczeniową.

Najprostszym przykładem układu o dwuwymiarowej przestrzeni stanów jest elektron. Możliwe są też jednak inne intrerpretacje – qubitem jest także stan spolaryzowanego fotonu czy stan kota Schrödingera.

Najważniejsza różnica pomiędzy bitem klasycznym (czyli po prostu bitem), a bitem kwantowym (qubitem), wynika z liniowości mechaniki kwamtowej. Bit może być tylko w stanie 0 lub tylko w stanie 1, natomiast stan qubitu może być dowolną kombinacja liniową stanów $|0\rangle$ i $|1\rangle$.

4.1.2 Rejestry kwantowe

Definicja 4.2 *Rejestren kwantowym nazywamy skończony ciąg qubitów. Standardową bazę B_n n-qubitowego rejestru kwantowego oznaczamy przez*

$$\mathcal{B}_n = \{|i\rangle | i \textit{ jest słowem } n\textit{-bitowym}\}$$

Rejestr kwantowy jest **kwantowym układem złożonym**. Zgodnie z teorią kwantową stan takiego układu opisany jest przez $i$loczyn tensorowy przestrzeni Hilberta podukładów.

4.2 Kryptografia kwantowa

Rozdział 5

Dodatek

5.1 Elementy topologii

Nich X będzie niepustym zbiorem.

Definicja 5.1 *przestrzenią topologiczną nazwywamy niepusty zbió X wraz z wyróżnioną rodziną T podzbiorówzbioru X, zwanych zbiorami otwartymi, spełnaijącą następujące warunki*

1. $\emptyset \in T$
2. *Dla dowolnej przeliczalnej rodziny zbiorów A_n,* $(\bigwedge_{)}$

Definicja 5.2 *Przestrzenią metryczną nazywamy zbiór X z odwzorowaniem $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ zwanym metryką, które spełnia następujące warunki*

1. $\rho(x, y) = 0$ *wtedy, i tylko wtedy gdy* $x = y$
2. $\bigwedge_{x,y \in X} \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\bigwedge_{x,y,z \in X} \rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ *(nierówność trójkąta)*

Poniżej podane są podstawowe definicje własność podzbiorów dowolnej przestrzeni topologicznej.

5.2 Teoria reprezentacji

Definicja 5.3 *Reprezentacją grupy G w przestrzeni wektorowej $V(\mathbb{C})$ nazywamy odwzorowanie*

$$\rho : G \to GLV \tag{5.1}$$

Bibliografia

[GI89] Marian Grabowski, Roman Stanisław Ingarden. *Mechanika kwantowa. Ujęcie w przestrzeniach Hilberta.* Państwowe Wydawnicto Naukowe, 1989.

[Mau59] Krzysztof Maurin. *Metody przestrzeni Hilberta*, wolumen 36 serii *Monografie matematyczne.* Państwowe Wydawnicto Naukowe, 1959.

[Mla87] Włodzimierz Mlak. *Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta*, wolumen 35 serii *Biblioteka Matematyczna.* Państwowe Wydawnicto Naukowe, 1987.

[Rud01] Walter Rudin. *Analiza funkcjonalna.* Wydawnicto Naukowe PWN, 2001.

[Sik58] Roman Sikorski. *Funkcje rzeczywiste*, wolumen 1 serii *Biblioteka Matematyczna.* Państwowe Wydawnicto Naukowe, 1958.

Skorowidz